Čikoš Pajor Gizela

Matematička analiza

zbirka zadataka za vežbe

I deo

Viša tehnička škola, Subotica
2002

P R E D G O V O R

Ova zbirka zadataka obuhvata gradivo koje je predviđeno za vežbe iz predmeta matematička analiza na elektrotehničkom, mašinskom i informatičkom odseku Više tehničke škole u Subotici.

Na početku svakog poglavlja navedene su najbitnije definicije i teoreme bez dokaza, koje su potrebne za rešavanje zadataka iz date oblasti. U svakom poglavlju možete naći detaljno izrađene zadatke koje ćemo i na vežbama obraditi, i tu po potrebi dati dodatna objašnjenja.

Na kraju svakog poglavlja možete naći zadatke koji nisu izrađeni, predlažu se za samostalnu vežbu. Ovi zadaci su birani iz poznatih zbirki zadataka iz matematičke analize (kao npr. Uščumlić–Miličić, Demidovič i drugi).

Pojedine oblasti se nadovezuju jedan na drugi, zato predlažem da vežbate zadatke po utvrđenom redosledu.

Ovu zbirku zadataka možete koristiti za pripremanje pismenog dela ispita, ali gradivo usmenog ispita ovde nije u dovoljnoj meri obrađeno.

Naše dosadašnje iskustvo je pokazalo da studenti iz različitih srednjih škola stižu sa jako različitim predznanjem. Zato svim studentima, koji iz ove skripte ne mogu da prate gradivo predlažem, da jednostavnije zadatke uvežbaju iz neke srednjoškolske zbirke zadataka.

Ovo je prvo izdanje na srpskom jeziku, izvinjavam se za greške koje su u njemu napravljene, rado ću ih ispraviti ako mi obratite pažnju na njih. Unapred se zahvaljujem.

Čikoš Pajor Gizela

S A D R Ž A J

1. Brojni nizovi.. *7 strana*
Zadaci za vežbu .... *16 strana*

2. Funkcije.. *19 strana*
2.1. Oblast definisanosti funkcije.. *19 strana*
Zadaci za vežbu.. *22 strana*

2.2. Parnost i neparnost funkcije.. *22 strana*
Zadaci za vežbu.. *25 strana*

2.3. Periodičnost funkcije.. *25 strana*
Zadaci za vežbu.. *28 strana*

2.4. Inverzna funkcija.. *28 strana*
Zadaci za vežbu.. *32 strana*

2.5. Granična vrednost i neprekidnost funkcije.. *33 strana*
Zadaci za vežbu.. *39 strana*

3. Diferencijalni račun.. *41 strana*
3.1. Izvod i diferencijal funkcije.. *41 strana*
Zadaci za vežbu.. *47 strana*

3.2. Izvodi višeg reda.. *48 strana*
Zadaci za vežbu.. *49 strana*

3.3. Lopitalovo pravilo.. *50 strana*
Zadaci za vežbu.. *55 strana*

4. Ispitivanje funkcija.. *57 strana*
Zadaci za vežbu.. *73 strana*

5. Neodređeni integral.. *75 szrana*
5.1. Integraljenje metodom smene promenljivih.................................... *78 strana*
Zadaci za vežbu.. *81 strana*

5.2. Parcijalna integracija.. *82 strana*
Zadaci za vežbu.. *84 strana*

5.3. Integral racionalne funkcije.. *85 strana*
Zadaci za vežbu.. *92 strana*

5.4. Integrali iracionalnih funkcija.. *93 strana*
Zadaci za vežbu.. *98 strana*

Zadaci za vežbu.. *100 strana*
Zadaci za vežbu.. *103 strana*
Zadaci za vežbu.. *105 strana*
Zadaci za vežbu.. *106 strana*
Zadaci za vežbu.. *109 strana*

5.5. Integrali trigonometrijskih funkcija ....*110 strana*
Zadaci za vežbu.. *113 strana*

5.6. Integral eksponencijalne funkcije... *114 strana*
Zadaci za vežbu.. *116 strana*

6. Određeni integral...*117 strana*
Zadaci za vežbu.. *119 strana*

6.1. Površina ravnih likova...*120 strana*
6.1.1. Površina ravnih likova u pravouglom kordinatnom sistemu. *120 strana*
Zadaci za vežbu.. *124 strana*

6.1.2. Površina ravnih likova u polarnom kordinatnom sistemu..... *125 strana*
Zadaci za vežbu.. *127 strana*

6.1.3. Površina ravnih likova u parametarskom obliku..................
Zadaci za vežbu...

6.2. Dužina luka krive...
6.2.1. Dužina luka krive u pravouglom kordinatnom sistemu........
Zadaci za vežbu...

6.2.2. Dužina luka krive u polarnom kordinatnom sistemu............
Zadaci za vežbu...

6.2.3. Dužina luka krive u parametarskom obliku.........................
Zadaci za vežbu...

6.3. Zapremina rotacionih tela...
6.3.1. Zapremina rotacionih tela u pravouglom kord. sistemu.......
Zadaci za vežbu...

6.3.2. Zapremina rotacionih tela u polarnom kord. sistemu............
Zadaci za vežbu...

6.3.3. Zapremina rotacionih tela u parametarskom obliku.............
Zadaci za vežbu...

6.4. Površina omotača rotacionih tela..
6.4.1. Površina omotača rotacionih tela u pravouglom kord. sist. ..
Zadaci za vežbu...

6.4.2. Površina omotača rotacionih tela u polarnom kord. sist. ......
Zadaci za vežbu...

6.4.3. Površina omotača rotacionih tela u parametarskom obliku...
Zadaci za vežbu..

7. Funkcije više promenljive...
7.1. Diferencijal funkcije dve promenljive...
7.1.1. Parcijalni izvodi i totalni diferencijali ....
Zadaci za vežbu..

7.1.2. Parcijalni izvodi složene funkcije.dve promenljive.............
Zadaci za vežbu..

7.2.Ekstremi funkcije dve promenljive...
Zadaci za vežbu..

7.2.1. Uslovni ekstrem funkcije dve promenljive..........................
Zadaci za vežbu..

8. Diferencijalne jednačine..
8.1. Diferencijalne jednačine prvog reda..
8.1.1. Dif. jednačine sa razdvojenim promenljivima......................
Zadaci za vežbu..

8.1.2. Homogene diferencijalne jednačine....................................
Zadaci za vežbu..

8.1.3. Linearne diferencijalne jednačine..
Zadaci za vežbu..

8.1.4. Bernulijeva diferencijalna jednačina...................................
Zadaci za vežbu..

8.1.5. Egzaktna diferencijalna jednačina...................................... .
Zadaci za vežbu..

8.2. Diferencijalne jednačine drugog (višeg) reda................................
8.2.1. Diferencijalne jednačine tipa $y^{(n)} = f(x)$ ....
Zadaci za vežbu..

8.2.2. Nepotpune diferencijalne jedn. koje ne sadrže y..................
Zadaci za vežbu..

8.2.3. Nepotpune diferencijalne jedn. koje ne sadrže x..................
Zadaci za vežbu..

8.2.4. Homogena linearna dif. jedn. sa const. koeficijentima.........
Zadaci za vežbu..

8.2.5. Nehomogena linearna dif. jedn. sa const. koeficijentima......
Zadaci za vežbu..

Literatura...

1. Brojni nizovi

Definicija: *Preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva zovemo brojni niz.*
Niz je znači preslikavanje $a : N \to R$.

Obično koristimo skraćeno označavanje:

$$a(1) = a_1$$
$$a(2) = a_2$$
$$\vdots$$
$$a(n) = a_n$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ su članovi niza, dok je a_n opšti član niza.

Definicija: *Niz* $\{a_n\}$ *zovemo rastućim ako je* $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots$;
a ako je $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$, *tada je niz opadajući.*
Rastuće i opadajuće nizove zajedničkim imenom nazivamo monotonim nizovima.

Niz $\{a_n\}$ je:
- monotono rastući ako je za $\forall n \in N \; : \; a_{n+1} - a_n \ge 0$
- strogo monotono rastući ako je za $\forall n \in N \; : \; a_{n+1} - a_n > 0$
- monotono opadajući ako je za $\forall n \in N \; : \; a_{n+1} - a_n \le 0$
- strogo monotono opadajući ako je za $\forall n \in N \; : \; a_{n+1} - a_n < 0$

Kod nizova sa pozitivnim članovima možemo koristiti i kriterijum količnika za određivanje monotonosti :
- monotono rastući, ako je za $\forall n \in N \; : \; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$
- strogo monotono rastući, ako je za $\forall n \in N \; : \; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$
- monotono opadajući, ako je za $\forall n \in N \; : \; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$
- strogo monotono opadajući, ako je za $\forall n \in N \; : \; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Definicija: *Broj* k *je donja granica niza* $\{a_n\}$ *ako niz nema manjeg člana od broja k:* $k \le a_n$.
Broj K *je gornja granica niza* $\{a_n\}$ *ako niz nema većeg člana od broja K:* $a_n \le K$.

Definicija: *Niz* $\{a_n\}$ *je ograničen, ako se može zadati broj* M *takav da je* $|a_n| \le M$.

Definicija: *Broj A je granica niza* $\{a_n\}$*, ako za bilo koje pozitivno* ε *postoji prag indeks (prirodan broj* n_0 *koji zavisi od* ε*) takav, da za sve prirodne brojeve* $n \geq n_0$*, važi da je* $|a_n - A| < \varepsilon$.

Logičkim simbolima napisano:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)\ |a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, n \in N.$$

1. Primer: **Odrediti opšti član niza** $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$.

Rešenje:

$$1 = a_1 = a(1) = \frac{1}{1^2}$$
$$\frac{1}{4} = a_2 = a(2) = \frac{1}{2^2}$$
$$\frac{1}{9} = a_3 = a(3) = \frac{1}{3^2}$$
$$\vdots$$
$$a_n = a(n) = \frac{1}{n^2}.$$

2. Primer: **Odrediti opšti član niza** $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$.

Rešenje:

$$\frac{2}{3} = a_1 = a(1) = \frac{1+1}{1+2}$$
$$\frac{3}{4} = a_2 = a(2) = \frac{2+1}{2+2}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

3. Primer: **Odrediti opšti član niza** $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23}, \ldots$.

Rešenje:

$$\frac{2}{3} = a_1 = a(1) = \frac{1^2+1}{5\cdot 1-2}$$
$$\frac{5}{8} = a_2 = a(2) = \frac{2^2+1}{5\cdot 2-2}$$
$$\frac{10}{13} = a_3 = a(3) = \frac{3^2+1}{5\cdot 3-2}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{n^2+1}{5\cdot n-2}.$$

4. Primer: **Napisati prvih pet članova niza** $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ **.**

Rešenje:

$$a_1 = a(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$$
$$a_2 = a(2) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$
$$a_3 = a(3) = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$$
$$a_4 = a(4) = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$$
$$a_5 = a(5) = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3}$$

Traženi niz je znači $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \dots$.

5. Primer: **Napisati prva četiri člana niza datog rekurzijom** $a_n = 3a_{n-1} + 1$ **ako je** $a_1 = 2$**.**

Rešenje:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$
$$a_3 = 3a_2 + 1 = 3 \cdot 7 + 1 = 22$$
$$a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 22 + 1 = 67$$

Traženi niz je znači $2, 7, 22, 67, \dots$.

6. Primer: **Ispitati monotonost niza** $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ **.**

Rešenje: Ako koristimo kriterijum razlike, tada je :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+1+1} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+2} - \frac{1}{n^2+1} =$$

$$= \frac{n^2+1-n^2-2n-2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} = \frac{-(2n+1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0$$

jer je $n \in N$, znači da je niz strogo monotono opadajući. Pošto niz ima samo pozitivne članove možemo primeniti i kriterijum količnika:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}} = \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} < 1$$

jer je brojilac za svako $n \in N$ manji od imenioca. Znači da i na osnovu količničkog kriterijuma možemo konstatovati da je niz strogo monotono opadajući.

7. Primer: **Ispitati monotonost niza** $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$ **.**

Rešenje: Primenimo kriterijum razlike:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+2} - \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2n+3}{3n+5} - \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{(2n+3)(3n+2)-(2n+1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} =$$

$$= \frac{6n^2+4n+9n+6-6n^2-10n-3n-5}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{1}{(3n+5)(3n+2)} > 0$$

znači da je posmatrani niz strogo monotono rastući.

8. Primer: **Ispitati ograničenost niza** $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ **.**

Rešenje: Pošto je

$$a_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1,$$

niz je ograničen sa donje strane i donja granica (infimum) je $k = 1$. Istovremeno je

$$a_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \le 2,$$

pa je niz ograničen i sa gornje strane i gornja granica (supremum) je $K = 2$.

9. Primer: **Dokazati da je niz** $a_n = \dfrac{5n}{n+1}$ **konvergentan, i da je granica broj** $A = 5$**.**

Rešenje: Niz je konvergentan ako je $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)\ |a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, n \in N$.

Konkretno: $$\left|\frac{5n}{n+1} - 5\right| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, n \in N$$

$$\left|\frac{5n-5n-5}{n+1}\right| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, n \in N$$

$$\frac{5}{n+1} < \varepsilon \qquad \forall n > n_0, n \in N$$

$$\frac{5}{\varepsilon} < n+1 \qquad \forall n > n_0, n \in N$$

$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

$$n_0 \geq \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

znači za $\forall \varepsilon > 0$ može se odrediti prag indeks $n_0 \geq \frac{5}{\varepsilon} - 1$ za koji važi, da svi članovi niza koji slede iza tog člana pripadaju $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$ okolini broja 5, odnosno broj 5 je granica posmatranog niza.

10. Primer: **Pokazati da je broj** $A = \frac{3}{5}$ **granica niza** $a_n = \frac{3n^2 + 1}{5n^2 - 1}$ **, i odrediti prag indeks počev od kojeg svi članovi niza pripadaju** $\varepsilon = 10^{-3}$ **okolini granice .**

Rešenje:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{3n^2 + 1}{5n^2 - 1} - \frac{3}{5} \right| < 10^{-3}$$

$$\left| \frac{15n^2 + 5 - 15n^2 + 3}{5(5n^2 - 1)} \right| < 10^{-3}$$

$$\left| \frac{8}{5(5n^2 - 1)} \right| < 10^{-3}$$

$$\frac{8}{5(5n^2 - 1)} < \frac{1}{1000}$$

$$5n^2 - 1 > \frac{8000}{5}$$

$$n^2 > \frac{1601}{5}$$

$$n > \sqrt{320{,}2}$$

$$n > 17{,}89$$

$$n_0 \geq 18$$

znači da počev od a_{18} svi članovi niza pripadaju $\varepsilon = 10^{-3}$ okolini broja $\frac{3}{5}$, a to ujedno znači da je niz konvergentan i da je granica broj $\frac{3}{5}$, odnosno da $a_n \to \frac{3}{5}$ ili drugačije pisano:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{3}{5} \, .$$

11. Primer: **Dati su nizovi** $a_n = 3 + \frac{5}{n}$ **i** $b_n = -2 + \frac{7}{n}$ **. Odrediti graničnu vrednost** $\lim\limits_{n \to \infty}(a_n + b_n)$**.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2+\frac{7}{n}\right)=$

$\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}(-2)+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}=3+0-2+0=1$.

12. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ **ako su** $a_n=5+\frac{1}{n}$ **i** $b_n=8+\frac{1}{n^2}$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{1}{n^2}\right)=5\cdot 8=40$.

13. Primer: **Ispitati konvergenciju niza** $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & , \ n=2k-1\\ \frac{n}{n+2} & , \ n=2k\end{cases}$ **.**

Rešenje: Moramo posebno ispitati kako se ponašaju članovi niza sa parnim i sa neparnim indeksima. Ako je :

$$n=2k-1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{\infty}=0 \ ,$$

znači da članovi sa neparnim indeksima nagomilavaju se oko tačke 0. Ako je:

$$n=2k \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2k}{2k+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{k+1}=1 \ ,$$

znači da se članovi sa parnim indeksima nagomilavaju oko tačke 1. Niz u ovom slučaju ima dve tačke nagomilavanja, 0 i 1. U okolini obe tačke nagomilavanja niz ima beskonačno puno članova, ali i van jedne okoline ima beskonačno puno članova. U takvom slučaju granica niza ne postoji, znači da je niz a_n divergentan.

14. Primer: **Ispitati konvergenciju niza** $a_n=3n+1$**, i** $b_n=7n-1$**, a zatim konvergenciju niza** $\frac{a_n}{b_n}$**.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)=3\cdot\infty+1=\infty$ znači da je niz a_n divergentan.

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(7n-1)=7\cdot\infty-1=\infty$ i niz b_n je divergentan.

Zbog divergencije ovih nizova granicu niza $\frac{a_n}{b_n}$ ne možemo računati kao $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$, jer izraz $\frac{\infty}{\infty}$ nije određen. U ovakvim slučajevima rešenje možemo odrediti na sledeći način:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{7n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(7-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{7-\frac{1}{n}}=\frac{3+0}{7-0}=\frac{3}{7}$$

jer se izraz može skratiti sa n, i $\frac{1}{n}\to 0$, u slučaju kada $n\to\infty$. Rezultat pokazuje da je niz $\frac{a_n}{b_n}$ konvergentan, i da je granica $\frac{3}{7}$.

15. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-4}{3n^2-4n+1}$**, i odrediti konvergenciju niza.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-4}{3n^2-4n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}$.

Niz je konvergentan, članovi konvergiraju ka broju $\frac{2}{3}$.

16. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{n^2+n+1}$**, i odrediti konvergenciju niza.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{n}-1\right)}{n\left(n+1+\frac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{n+1}=\frac{-1}{\infty}=0$.

Niz je konvergentan, članovi konvergiraju ka broju 0.

17 Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-1}{2n+3}$**, i ispitati konvergenciju niza.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-1}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(3n+5-\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+5}{2}=\frac{3\cdot\infty+5}{2}=\frac{\infty}{2}=\infty$.

Niz je divergentan.

18. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}$**, i odrediti konvergenciju niza.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)}{n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}=\dfrac{\sqrt{1}+1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

Niz je konvergentan, članovi konvergiraju broju 1.

19. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$**, i odrediti konvergenciju niza.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3=\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\left(\dfrac{n^2\left(3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{7}{n^2}\right)}\right)^3=\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$.

Niz je konvergentan.

20. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}$**, ako znamo da za** $a>0$ **važi** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ **i** $\lim\limits_{n\leftrightarrow\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\cdot\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\cdot 1=1$.

21. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+5}$.

Rešenje: $6n\le 6n+5\le 6n+n=7n\quad ako\quad n\to\infty$,

tada je $\sqrt[n]{6n}\le\sqrt[n]{6n+5}\le\sqrt[n]{7n}$

znači i $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+5}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n}$

na osnovu prethodnog zadatka

$$1\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+6}\le 1$$

odakle sledi da je

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+6}=1.$$

22. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$.

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\dfrac{3}{\infty}=0$.

23. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-2}-\sqrt[3]{n}\right)$ **.**

Rešenje:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-2}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-2}-\sqrt[3]{n}\right)\frac{\sqrt[3]{(n-2)^2}+\sqrt[3]{n(n-2)}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n-2)^2}+\sqrt[3]{n(n-2)}+\sqrt[3]{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2-n}{\sqrt[3]{(n-2)^2}+\sqrt[3]{n(n-2)}+\sqrt[3]{n^2}}=\frac{-2}{\infty}=0.$$

24. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$**, ako znamo da je** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$**.**

Rešenje:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{n\cdot\frac{-(n+1)}{-(n+1)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n}{-(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{n}{-(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{-(n+1)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-(n+1)}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

25. Primer: **Izračunati graničnu vrednost a** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{2n+1}\right)^{2n+1}$ **.**

Rešenje: U brojiocu i imeniocu opšteg člana niza koeficijenti uz n nisu jednaki, pa prvo to moramo da postignemo, a zatim ponavljamo postupak koji smo primenili u prethodnom zadatku:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+4}{2n+1}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left(\frac{2n+1+3}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left(1+\frac{3}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^{\frac{2n+1}{3}\cdot 3}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^{\frac{2n+1}{3}}\right)^3\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot e^3\right)=\frac{1}{\infty}\cdot e^3=0\ .$$

26. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]$ **.**

Rešenje: Zadatak možemo rešiti ako primenimo osnovna pravila logaritmovanja, na sledeći način:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1$$

ZADACI ZA VEŽBU:

1. Zadatak: **Izračunati prvih pet članova niza** $a_n=\dfrac{n^2+2}{2n^2-3}$ **.**

2. Zadatak: **Izračunati prvih pet članova niza** $a_n=\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$ **.**

3. Zadatak: **Odrediti opšti član niza** $1,\frac{1}{5},\frac{1}{25},\frac{1}{125},\ldots$ **.**

4. Zadatak: **Odrediti opšti član niza** $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32}\ldots$ **.**

5. Zadatak: **Ispitati monotonost niza** $a_n=\dfrac{3}{2n+3}$ **.**

6. Zadatak: **Ispitati monotonost niza** $a_n=\dfrac{1}{1+n^2}$ **.**

7. Zadatak: **Ispitati ograničenost niza** $a_n = \dfrac{7n+1}{4n-2}$.

8. Zadatak: **Ispitati ograničenost niza** $a_n = \dfrac{n^2+2}{n-3}$.

9. Zadatak: **Pokazati da je granica niza** $a_n = \dfrac{2n+12}{n-6}$ **broj** $A=2$**, zatim naći prag indeks za** $\varepsilon = 10^{-2}$ **okolinu granice.**

10. Zadatak: **Dokazati da je niz** $a_n = \dfrac{n^2-3}{n-3}$ **divergentan.**

11. Zadatak: **Dati su nizovi** $a_n = \dfrac{3n+2}{7n-6}$ **i** $b_n = \dfrac{6n-6}{3n-2}$ **. Izračunati granične vrednosti**

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)$**,** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ **i** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

12. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{3n^5}$.

13. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{2n+1}-\dfrac{3n^2}{6n+1}\right)$.

14. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+9n+1}$.

15. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

16. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{2n+3}$.

17. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}\right)$**.**

18. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n+9}\right)$**.**

19. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$.

20. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}$.

21. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+8}$ **.**

22. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n}$ **.**

23. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^{n}$ **.**

24. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{5n}$ **.**

25. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{2n}$ **.**

2. Funkcije

U centru ispitivanja matematičke analize stoji funkcija. Pojam funkcije se razvio iz opštih principa uzročnih zavisnosti. Pri ispitivanju zavisnosti između nekih veličina nalazimo takve odnose, u kojima jednoj ili više vrednosti neke veličine pripada određena vrednost neke druge veličine. Tada ovu drugu veličinu nazivamo *funkcijom* prve ili prvih veličina.

U funkcijskom odnosu veličinu koju biramo nazivamo *nezavisnom promenljivom*, dok veličinu koja se računa nazivamo *zavisnom promenljivom*.

U zavisnosti od toga da li je zavisna promenljiva funkcija samo jedne ili više nezavisnih promenljivih razlikujemo *funkcije jedne promenljive* i *funkcije više promenljivih*. Mi ćemo se za sada zadržati na funkcijama jedne realne promenljive i ispitivaćemo njihove osobine.

Funkcija se može zadati na više načina, ali sa matematičkog aspekta najvažniji način je zadavanje funkcije *formulom*. Tada se zadaje veza $y = f(x)$ koja sem zavisne promenljive y i nezavisne promenljive x može da sadrži samo neke brojeve. Ako želimo da izračunamo one vrednosti funkcije y koje pripadaju vrednostima $x = x_0$ nezavisne promenljive, tada u zadatu formulu umesto promenljive x uvrštavamo vrednost x_0.

Nedostatak zadavanja funkcije formulom je u tome da nije dovoljno očigledna. Zato se trudimo da ispitivanjem njenih osobina nacrtamo *krivu* ili *grafik funkcije,* koji ima baš tu prednost očiglednosti.

Definicija: *Grafik funkcije je skup onih tačaka u ravni, čije su apscise (x-kordinate) vrednosti nezavisne promenljive, a ordinate (y-kordinate) su odgovarajuće vrednosti zavisne promenljive.*

2.1. Oblast definisanosti funkcije

Definicija: *Funkcija $y = f(x)$ je definisana u tački x_0 ako za x_0 postoji vrednost funkcije, a ako se za x_0 ne može izračunati vrednost funkcije tada kažemo da funkcija nije definisana u tački x_0.*

Definicija: *Skup svih tačaka u kojima je funkcija $y = f(x)$ definisana naziva se oblast definisanosti (ili domen) funkcije i označava se sa D_f.*

Definicija: *Skup svih mogućih vrednosti zavisne promenljive y koji pripadaju svim mogućim vrednostima nezavisne promenljive iz oblasti definisanosti, naziva se skup vrednosti (ili kodomen) funkcije i označava se sa CD_f.*

27. Primer: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\dfrac{x^3+7}{x^2-5x+6}$ **.**

Rešenje: Imenilac racionalne funkcije ne sme biti nula, zato:

$$f(x)=\frac{x^3+7}{(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{aligned} D_f:\ & x-2\neq 0 \ \Rightarrow\ x\neq 2\\ & x-3\neq 0 \ \Rightarrow\ x\neq 3 \end{aligned}$$

$D_f=R\setminus\{2,3\}$ je oblast definisanosti funkcije.

28. Primer: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}+e^{\frac{1}{x}}$ **.**

Rešenje: Iracionalna funkcija sa parnim korenom je definisana samo za nenegativne vrednosti pod korenom, a kod eksponencijalne funkcije izložilac treba da bude definisan, zato:

$$\begin{aligned} D_f:\ & x+1\geq 0\\ & 3-x\geq 0\\ & x\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_f:\ & x\geq -1\\ & x\leq 3\\ & x\neq 0 \end{aligned}$$

$D_f: x\in[-1,0)\cup(0,3]$ je oblast definisanosti funkcije.

29. Primer: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln(1-x)}$ **.**

Rešenje: Logaritamska funkcija je definisana samo za pozitivne argumente, zato:

$$\begin{aligned} D_f:\ & x+1\geq 0\\ & 1-x>0\\ & \ln(1-x)\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_f:\ & x\geq -1\\ & x<1\\ & 1-x\neq 1 \ \Rightarrow\ x\neq 0 \end{aligned}$$

$D_f: x\in[-1,0)\cup(0,1)$ je oblast definisanosti funkcije.

30. Primer: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\arcsin\left(3+2^{x}\right)$ **.**

Rešenje: Funkcije $\arcsin x$ i $\arccos x$ su definisane u zatvorenom intervalu $[-1,1]$, zato:

$$D_f:\ -1\le 3+2^{x}\le 1$$

$$-4\le\ 2^{x}\ \le -2 \quad \text{što je nemoguće , jer } 2^{x}>0 \text{ za svako } x\in R$$

$D_f: x\in\varnothing$, funkcija nije definisana ni za jednu vrednost promenljive x.

31. Primer: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\ln\left(\arcsin\dfrac{x+2}{5-x}\right)$**.**

Rešenje: Ako uzmemo u obzir oblasti definisanosti svih elementarnih funkcija koji su sastavni delovi date složene funkcije, tada je:

$$D_f:\ 5-x\ne 0$$

$$-1\le\frac{x+2}{5-x}\le 1$$

$$\arcsin\frac{x+2}{5-x}>0$$

$$D_f:\ x\ne 5$$

$$-1\le\frac{x+2}{5-x}\le 1$$

$$0<\frac{x+2}{5-x}\le 1$$

$$D_f:\ x\ne 5$$

$$0<\frac{x+2}{5-x}\le 1$$

$D_f:$

$$\frac{x+2}{5-x}>0 \quad\wedge\quad \frac{x+2}{5-x}\le 1$$

$$\frac{x+2}{5-x}-1\le 0$$

$$\frac{x+2-5+x}{5-x}\le 0$$

$$\frac{2x-3}{5-x}\le 0$$

$$D_1: x\in(-2,5)$$

$$D_2: x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]\cup(5,\infty)$$

$$D_f=D_1\cap D_2$$

$D_f: x\in\left(-2,\dfrac{3}{2}\right]$ je oblast definisanosti funkcije.

ZADACI ZA VEŽBU:

***26. Zadatak*: Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ **.**

***27. Zadatak:* Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ **.**

***28. Zadatak:* Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt{x^2+x+5}$ **.**

***29. Zadatak:* Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt{x^2-2}$ **.**

***30. Zadatak:* Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ **.**

***31. Zadatak:* Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\ln\left(x^2-5x+4\right)$ **.**

***32. Zadatak:* Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ **.**

***33. Zadatak:* Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt{\cos 3x}$ **.**

***34. Zadatak:* Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$ **.**

***35. Zadatak:* Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{x-4}{x+2}}+\sqrt{4-3x-x^2}$ **.**

2.2. Parnost i neparnost funkcije

Definicija: *Funkcija* $y=f(x)$ *je parna ako za* $\forall x\in D_f$ *važi da je* $f(-x)=f(x)$.

Grafik parne funkcije je simetričan u odnosu na *y*-osu.

Definicija: *Funkcija* $y=f(x)$ *je neparna ako za* $\forall x\in D_f$ *važi da je* $f(-x)=-f(x)$.

Grafik neparne funkcije je simetričan u odnosu na kordinatni početak.

32. Primer: **Ispitati parnost konstantne funkcije** $f(x)=\frac{3}{2}$ **.**

Rešenje: Da bismo utvrdili parnost ili neparnost neke funkcije, treba da ispitamo $f(-x)$. U ovom slučaju je:

$$f(-x)=\frac{3}{2}=f(x)$$

u svakoj tački x oblasti definisanosti, a to znači da je funkcija:

$$f(x)=\frac{3}{2}$$

parna funkcija.

33. Primer: **Ispitati parnost polinomne funkcije** $f(x)=x^5-5x^3+x$ **.**

Rešenje: Takođe ispitujemo $f(-x)$:

$$f(-x)=(-x)^5-5(-x)^3+(-x)$$

$$f(-x)=-x^5+5x^3-x$$

$$f(-x)=-(x^5-5x^3+x)$$

$$f(-x)=-f(x)$$

za svaku tačku x oblasti definisanosti, a to znači da je funkcija :

$$f(x)=x^5-5x^3+x$$

neparna.

34. Primer: **Ispitati parnost logaritamske funkcije** $f(x)=\ln x$ **.**

Rešenje: Logaritamska funkcija $f(x)=\ln x$ definisana je za vrednosti $x>0$, zato :

$$f(-x)=\ln(-x)$$

nije ni definisano, naime za $x>0$ sledi $-x<0$, a logaritam negativnih brojeva nije definisan. To znači da funkcija:

$$f(x)=\ln x$$

nije ni parna ni neparna .

35. Primer: **Ispitati parnost eksponencijalne funkcije** $f(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ **.**

Rešenje: $$f(-x)=\frac{1}{2}\left(a^{-x}+a^x\right)$$

$$f(-x)=f(x)$$

u svakoj tački oblasti definisanosti, a to znači da je funkcija:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(a^{x}+a^{-x}\right)$$

parna.

***36. Primer*: Ispitati parnost iracionalne funkcije** $f(x)=\sqrt[5]{(x-1)^2}+\sqrt[5]{(x+1)^2}$ **.**

Rešenje:

$$f(-x)=\sqrt[5]{(-x-1)^2}+\sqrt[5]{(-x+1)^2}$$

$$f(-x)=\sqrt[5]{(x+1)^2}+\sqrt[5]{(x-1)^2}$$

$$f(-x)=f(x)$$

u svakoj tački oblasti definisanosti, a to znači da je funkcija:

$$f(x)=\sqrt[5]{(x-1)^2}+\sqrt[5]{(x+1)^2}$$

parna.

***37. Primer:* Ispitati parnost logaritamske funkcije** $f(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ **.**

Rešenje:

$$f(-x)=\log_a\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)$$

$$f(-x)=\log_a\left[\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$$

$$f(-x)=\log_a\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$f(-x)=\log_a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$f(-x)=\log_a 1-\log_a\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$f(-x)=0-\log_a\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$f(-x)=-\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$f(-x)=-f(x)$$

u svakoj tački oblasti definisanosti, a to znači da je funkcija:

$$f(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

neparna.

ZADACI ZA VEŽBU:

36. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=e^{x}+e^{-x}$ **.**

37. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=a^{x}-a^{-x}$ **.**

38. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=x+\dfrac{1}{x^{2}}$ **.**

39. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=x^{3}-4x$ **.**

40. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=\dfrac{10x}{1+x^{2}}$ **.**

41. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=\sqrt{1+x+x^{2}}-\sqrt{1-x+x^{2}}$ **.**

42. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ **.**

43. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=2^{x}$ **.**

44. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=\sin\left(x^{5}-x^{3}+1\right)$ **.**

45. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=\cos\left(\dfrac{6}{x^{4}+4}\right)$ **.**

2.3. Periodičnost funkcije

Definicija: *Funkcija* $y=f(x)$ *je periodična ako postoji pozitivan realan broj* ω *takav, da za svaku tačku* x *oblasti definisanosti važi* $f(x+\omega)=f(x)$. *Svaki broj* ω *koji zadovoljava ovaj uslov je period funkcije* $y=f(x)$, *dok je najmanji takav broj* ω_0 *osnovni period.*

38. Primer: **Ispitati periodičnost funkcije** $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}$ **, zatim odrediti osnovni period.**

Rešenje: $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}=\sin\left(\dfrac{x}{3}+2k\pi\right)$, $k\in Z$ jer je funkcija $\sin x$ periodična po 2π. Ako je funkcija $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}$ periodična, onda mora da postoji broj ω takav, da je:

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\sin\frac{x+\omega}{3}=\sin\left(\frac{x}{3}+2k\pi\right)$$

$$\frac{x}{3}+\frac{\omega}{3}=\frac{x}{3}+2k\pi$$

$$\frac{\omega}{3}=2k\pi$$

$\omega=6k\pi$ je pozitivan broj za $k\in Z^{+}$, znači da je funkcija:

$$f(x)=\sin\frac{x}{3}$$

periodična po $\omega=6k\pi$. Osnovni period se dobija za $k=1$, u ovom slučaju $\omega_0=6\pi$.

39. Primer: **Ispitati periodičnost funkcije $f(x)=\cos\dfrac{3x-2}{5}$, i odrediti osnovni period.**

Rešenje: $f(x)=\cos\dfrac{3x-2}{5}=\cos\left(\dfrac{3x-2}{5}+2k\pi\right)$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\cos\frac{3(x+\omega)-2}{5}=\cos\left(\frac{3x-2}{5}+2k\pi\right)$$

$$\frac{3x+3\omega-2}{5}=\frac{3x-2}{5}+2k\pi$$

$$\frac{3\omega}{5}=2k\pi$$

$\omega=\dfrac{10k\pi}{3}$ je period, a osnovni period je :

$$\omega_0=\frac{10\pi}{3}.$$

40. Primer: **Ispitati periodičnost funkcije $f(x)=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x$, i odrediti osnovni period.**

Rešenje: $f(x)=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x=1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x+2k\pi\right)$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$1+\cos\frac{\pi}{2}(x+\omega)=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2k\pi\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\omega\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2k\pi\right)$$

$$\frac{\pi}{2}\omega=2k\pi$$

$\omega=4k$ je period, a osnovni period je:

$\omega_0=4$.

41. Primer: Ispitati period funkcije $f(x)=\cos^2 x$, zatim odrediti osnovni period.

Rešenje: Primenom trigonometrijskog identiteta $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ zamenimom kvadratnu trigonometrijsku funkciju sa linearnom:

$$f(x)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x+2k\pi)$$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2(x+\omega)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x+2k\pi)$$

$$\cos(2x+2\omega)=\cos(2x+2k\pi)$$

$$2\omega=2k\pi$$

$\omega=k\pi$ je period, a osnovni period je :

$\omega_0=\pi$.

42. Primer: Ispitati periodičnost funkcije $f(x)=\sin\sqrt{x}$.

Rešenje:

$$f(x)=\sin\sqrt{x}=\sin\left(\sqrt{x}+2k\pi\right)$$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\sin\sqrt{x+\omega}=\sin\left(\sqrt{x}+2k\pi\right)$$

$$\sqrt{x+\omega}=\sqrt{x}+2k\pi$$

$$x+\omega=x+4k\pi\sqrt{x}+4k^2\pi^2$$

$$\omega=4k\pi\sqrt{x}+4k^2\pi^2\neq const.$$

pošto dobijeno ω sadrži x, znači da ne postoji pozitivna konstanta ω za koje je $f(x+\omega)=f(x)$, a to znači da funkcija $f(x)=\sin\sqrt{x}$ nije periodična.

ZADACI ZA VEŽBU:

46. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\sin\frac{3x+1}{4}$ **.**

47. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\sin 4x$ **.**

48. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\frac{1}{3}-\sin\sqrt{2x}$ **.**

49. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$ **.**

50. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\cos^2(3x)$ **.**

51. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=10\sin 3x$ **.**

52. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\sin^2 x$ **.**

53. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti** ω_0 **za funkciju** $f(x)=2\sin 2x+3\cos 2x$ **.**

54. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\tan\frac{3x}{2}$ **.**

55. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\sqrt{\tan x}$ **.**

2.4. Inverzna funkcija

Definicija: *Ako je funkcija* $y=f(x)$ *bijekivna (zavisnost između promenljivih x i y je takva, da zadavanje bilo koje promenljive jednoznačno određuje drugu), tada pod njenom inverznom funkcijom podrazumevamo onu funkciju* $y=f^{-1}(x)$*, čija je oblast definisanosti skup vrednosti funkcije* $f(x)$*, i ako je* $f(x_0)=y_0$ *tada je* $f^{-1}(y_0)=x_0$ *za svaku tačku* x_0 *oblasti definisanosti, odnosno inverzna funkcija funkcije* $f(x)$ *je takva funkcija* $f^{-1}(x)$ *za koju važi da je:*
$f^{-1}(f(x))=x$ *ili* $f^{-1}(y)=x$*, i ako je* $f:D_f\to CD_f$ *tada je* $f^{-1}:CD_f\to D_f$*.*

Iz same definicije sledi da kod funkcije f i njene inverzne funkcije f^{-1} menjaju ulogu nezavisna i zavisna promenljiva (x i y), oblast definisanosti i skup vrednosti (D_f i CD_f).

Kod određivanja inverzne funkcije iskoristićemo tačno ovu osobinu.

43. Primer: **Za funkciju $f(x)=x+1$ odrediti inverznu funkciju $f^{-1}(x)$, i oblast definisanosti inverzne funkcije $D_{f^{-1}}$.**

Rešenje: $f \quad : y = x+1$

kod inverzne funkcije menjaju ulogu nezavisna i zavisna promenljiva,

$$f^{-1} : x = y+1$$

iz ove formule treba izraziti zavisnu promenljivu y funkcije f^{-1},

$$f^{-1} : y = x-1$$

pa je tražena inverzna funkcija

$$f^{-1}(x) = x-1$$

a oblast definisanosti ove funkcije je $D_{f^{-1}} : x \in R$.

44. Primer: **Za funkciju $f(x)=\ln\frac{x}{2}$ odrediti inverznu funkciju $f^{-1}(x)$, i oblast definisanosti inverzne funkcije $D_{f^{-1}}$.**

Rešenje: $f \quad : y = \ln\frac{x}{2}$

$$f^{-1} : x = \ln\frac{y}{2}$$

$$e^x = \frac{y}{2}$$

$$y = 2e^x$$

$$f^{-1}(x) = 2e^x$$

je tražena inverzna funkcija, a oblast definisanosti ove funkcije je $D_{f^{-1}} : x \in R$.

45. Primer: **Odrediti inverznu funkciju za $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$, a zatim oblast definisanosti dobijene inverzne funkcije.**

Rešenje: $f \quad : y = \sqrt[3]{x^2+1}$

$$f^{-1} : x = \sqrt[3]{y^2+1}$$

$$x^3 = y^2+1$$

$$y^2 = x^3-1$$

$$y = \pm\sqrt{x^3-1}$$

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x^3 - 1}$$

je tražena inverzna funkcija, a oblast definisanosti ove funkcije je:

$$D_{f^{-1}} : x^3 - 1 \geq 0$$
$$(x-1)(x^2 + x + 1) \geq 0$$
$$x - 1 \geq 0$$
$$x \geq 1$$
$$D_{f^{-1}} : x \in [1, +\infty).$$

46. Primer: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za $f(x) = \mathrm{arctg}3x$.**

Rešenje:

$$f \quad : y = \mathrm{arctg}3x$$
$$f^{-1} : x = \mathrm{arctg}3y$$
$$\mathrm{tg}x = 3y$$
$$y = \frac{1}{3}\mathrm{tg}x$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\mathrm{tg}x$$

je tražena inverzna funkcija, a oblast definisanosti ove funkcije je $D_{f^{-1}} : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

47. Primer: **Odrediti inverznu funkciju za $f(x) = \dfrac{e^{\cos x} - 1}{2 + e^{\cos x}}$ i oblast definisanosti dobijene inverzne funkcije.**

Rešenje:

$$f \quad : y = \frac{e^{\cos x} - 1}{2 + e^{\cos x}}$$
$$f^{-1} : x = \frac{e^{\cos y} - 1}{2 + e^{\cos y}}$$
$$x\left(2 + e^{\cos y}\right) = e^{\cos y} - 1$$
$$x e^{\cos y} - e^{\cos y} = -1 - 2x$$
$$e^{\cos y}(1 - x) = 1 + 2x$$

$$e^{\cos y} = \frac{1+2x}{1-x}$$
$$\cos y = \ln\frac{1+2x}{1-x}$$
$$y = \arccos\left(\ln\frac{1+2x}{1-x}\right)$$

$$f^{-1}(x) = \arccos\left(\ln\frac{1+2x}{1-x}\right)$$

je tražena inverzna funkcija, a oblast definisanosti je:

$$D_{f^{-1}}: 1-x \neq 0$$
$$\frac{1+2x}{1-x} > 0$$
$$-1 \leq \ln\frac{1+2x}{1-x} \leq 1$$

$$D_{f^{-1}}: x \neq 1$$
$$\frac{1+2x}{1-x} > 0$$
$$\frac{1}{e} \leq \frac{1+2x}{1-x} \leq e$$

$$D_{f^{-1}}: \frac{1}{e} \leq \frac{1+2x}{1-x} \leq e$$

$$\frac{1+2x}{1-x} \geq \frac{1}{e} \qquad \wedge \qquad \frac{1+2x}{1-x} \leq e$$

$$\frac{1+2x}{1-x} - \frac{1}{e} \geq 0 \qquad\qquad \frac{1+2x}{1-x} - e \leq 0$$

$$\frac{e+2ex-1+x}{e(1-x)} \geq 0 \qquad\qquad \frac{1+2x-e+ex}{1-x} \leq 0$$

$$\frac{(2e+1)x+e-1}{e(1-x)} \geq 0 \qquad\qquad \frac{(2+e)x+1-e}{1-x} \leq 0$$

$$x \in \left[\frac{1-e}{2e+1}, 1\right) \qquad\qquad x \in \left(-\infty, \frac{e-1}{2+e}\right] \cup (1, +\infty)$$

oblast definisanosti inverzne funkcije je presek ovih oblasti, $D_{f^{-1}}: x \in \left[\frac{1-e}{2e+1}, \frac{e-1}{2+e}\right]$.

ZADACI ZA VEŽBU:

56. Zadatak: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$$f(x)=2x+3.$$

57. Zadatak: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$$f(x)=x^2-1.$$

58. Zadatak: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$$f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}.$$

59. Zadatak: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$$f(x)=\log\frac{x+2}{5}.$$

60. Zadatak: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$$f(x)=\cos x-\sin x+1.$$

61. Zadatak: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$$f(x)=\ln\left(\arcsin\frac{x}{x+1}\right).$$

62. Zadatak: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$$f(x)=2\arctan\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right).$$

63. Zadatak: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$$e^x(2\cos y-1)=2\sin y-1.$$

64. Zadatak: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$$2e^x\sin y+2\cos y=e^x-1.$$

2.5. Granična vrednost i neprekidnost funkcije

Definicija: *Funkcija* $y = f(x)$ *ima graničnu vrednost* A *u tački* a *, ako za svaki niz tačaka koji* $x \to a$ *i* $x \neq a$ *, važi da* $f(x) \to A$*, i to obeležavamo na sledeći način:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Definicija: *Ako je* $x < a$ *i* $x \to a$ *tada po dogovoru kažemo da* $x \to a - 0$*, a broj* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ *zovemo: leva granična vrednost funkcije* $f(x)$ *u tački* a.

Definicija: *Ako je* $x > a$ *i* $x \to a$ *tada po dogovoru kažemo da* $x \to a + 0$*, a broj* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ *zovemo: desna granična vrednost funkcije* $f(x)$ *u tački* a.

Definicija: *Funkcija* $y = f(x)$ *je neprekidna u tački* a *, ako u toj tački postoje leva i desna granična vrednost, i ako su one jednake sa vrednošću funkcije u toj tački:* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ *odnosno* $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$.

Prilikom izračunavanja granične vrednosti funkcije u nekoj tački a često dobijamo *neodređen izraz*. U ovakvim slučajevima pomoću različitih algebraskih transformacija oslobađamo se od neodređenosti u izrazu. Neodređeni izrazi se mogu pojaviti u sedam različitih oblika, koje možemo uvrstiti u tri grupe.

Neodređeni izrazi:

1. $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$

2. $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

3. 1^{∞} , 0^{0} , ∞^{0}

Ako računamo graničnu vrednost oblika $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***i*** $P(a) = Q(a) = 0$***, tada imamo neodređen izraz oblika*** $\dfrac{0}{0}$***, koji treba skratiti sa binomom*** $x - a$ ***.***

48. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^3 - 2x + 1}$**.**

Rešenje: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^3 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2 + x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x - 1)} = \dfrac{1+1+1}{1+1-1} = \dfrac{3}{1} = 3$.

49. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-1}=\dfrac{2-3}{4-1}=-\dfrac{1}{3}$.

50. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-25}$

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^2}{(x-5)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x+5}=\dfrac{0}{10}=0$.

Granične vrednosti oblika $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***najčešće su neodređeni izrazi oblika*** $\dfrac{\infty}{\infty}$***, koje rešavamo tako da izvlačimo pred zagradu i skartimo sa najvećim stepenom promenljive*** x***.***

51. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+5x-3}{2x^3-x+12}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+5x-3}{2x^3-x+12}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}}=\dfrac{3}{2}$,

skratili smo izraz sa x^3, i kada $x\to\infty$, tada $\dfrac{2}{x}\to 0$, $\dfrac{5}{x^2}\to 0$ itd.

52. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+10}{5x^2-x-1}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+10}{5x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{10}{x^2}\right)}{x^2\left(5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{10}{x^2}}{5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{5}=\dfrac{\infty}{5}=\infty$.

53. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+5}{x^2+2x+1}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+5}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(4+\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{5}{x}}{x+2+\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{4}{\infty}=0$.

Granične vrednosti neodređenog oblika kod iracionalnih izraza najčešće možemo rešavati racionalizacijom brojilaca ili imenilaca.

54. Primer: **Izračunati graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$.**

Rešenje:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\frac{\sqrt{9x^2+1}+3x}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\frac{1}{\infty}=0\ .$$

55. Primer: **Izračunati graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\ .$$

56. Primer: **Izračunati graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sin 2x}$.**

Rešenje:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sin 2x}\cdot\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\mathrm{tg}x-1-\mathrm{tg}x}{2\sin x\cos x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=\lim_{x\to\pi}\frac{-2\mathrm{tg}x}{2\sin x\cos x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\sin x\cos x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{\cos^2 x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=$$

$$=\frac{-1}{(-1)^2(1+1)}=-\frac{1}{2}\ .$$

Kod računanja graničnih vrednosti trigonometrijskih funkcija najčešće možemo rešiti zadatak primenom osnovnog limesa $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ***i*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1$.

57. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=1\cdot 3=3$.

58. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$**.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$.

59. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$**.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}\cdot\frac{x^2}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\ .$$

60. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$**.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x+\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm 0}\sqrt{2}\cdot\frac{|\sin x|}{x}=$

$$=\sqrt{2}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\frac{|\sin x|}{x}\cdot\frac{|x|}{|x|}=\sqrt{2}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\cdot\frac{|x|}{x}=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\lim_{x\to\pm 0}\frac{|x|}{x}=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to +0}\frac{|x|}{x}\\ \sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to -0}\frac{|x|}{x}\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{2}\cdot 1 & ha\ x\to +0\\ \sqrt{2}\cdot(-1) & ha\ x\to -0\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{2} & ha\ x\to +0\\ -\sqrt{2} & ha\ x\to -0\end{cases}.$$

Kod graničnih vrednosti u kojima se i u osnovi i u izložiocu pojavljuje promenljiva x, i izraz je neodređen oblika 1^{∞}***, primenjujemo osnovni limes*** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$***, gde je broj*** $e=2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ldots$ ***iracionalna konstanta, Neperov (ili Ojlerov) broj.***

61. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^{x}$**.**

Rešenje: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+1}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{x\cdot\frac{2x+1}{2x+1}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{(2x+1)\cdot\frac{x}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{2x+1}\right]^{\frac{x}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x}{2x+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\ .$$

62. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim_{x\to0}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$**.**

Rešenje: $\lim_{x\to0}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{\mathrm{ctg}x}\right)^{\mathrm{ctg}x}=\left|\begin{array}{c}\mathrm{ctg}x=t\\ x\to0\\ t\to\infty\end{array}\right|=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e\ .$

63. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$**.**

Rešenje: $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x}=t\\ x\to0\\ t\to\infty\end{array}\right|=$

$$=\ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]=\ln e=1\ .$$

64. Primer: **Odrediti vrednost konstante** A **tako, da funkcija** $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & ,\ x<0\\ A & ,\ x=0\\ 1+x & ,\ x>0\end{cases}$

bude neprekidna.

Rešenje: Funkcija $1-x^2$ (parabola) je neprekidna za vrednosti $x<0$, isto tako je funkcija $1+x$ (prava) neprekidna za vrednosti $x>0$. Da bi data funkcija $f(x)$ bila neprekidna,

vrednost funkcije u $x=0$ treba definisati tako da ona bude neprekidna i u tački spajanja, odnosno treba da je:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = f(0) = \lim_{x\to +0} f(x)$$
$$\lim_{x\to -0}\left(1-x^2\right) = A = \lim_{x\to +0}\left(1+x\right)$$
$$1 = A = 1$$

znači

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & , \quad x<0 \\ 1 & , \quad x=0 \\ 1+x & , \quad x>0 \end{cases}.$$

65. Primer: **Odrediti vrednost parametra λ tako, da funkcija $f(x)=\begin{cases} e^{-x}+1 & , \quad x\ge 0 \\ x+\lambda & , \quad x<0 \end{cases}$ bude neprekidna.**

Rešenje: Slično rešavanju prethodnog zadatka:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = f(0) = \lim_{x\to +0} f(x)$$
$$\lim_{x\to -0}\left(x+\lambda\right) = e^{-0}+1 = \lim_{x\to +0}\left(e^{-x}+1\right)$$
$$0+\lambda = 1+1 = 1+1$$
$$\lambda = 2 = 2$$

znači funkcija $f(x)$ je neprekidna ako je $\lambda = 2$, odnosno

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}+1 & , \quad x\ge 0 \\ x+2 & , \quad x<0 \end{cases}.$$

66. Primer: **Odrediti vrednost parametra A tako da je funkcija $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \quad x\ne 2 \\ A & , \quad x=2 \end{cases}$ neprekidna.**

Rešenje:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = f(2) = \lim_{x\to 2+0} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-4}{x-2} = A = \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-4}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2-0}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = A = \lim_{x\to 2+0}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2-0}(x+2) = A = \lim_{x\to 2+0}(x+2)$$
$$4 = A = 4$$

znači da je funkcija $f(x)$ neprekidna za $A=4$, odnosno

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \quad x\ne 2 \\ 4 & , \quad x=2 \end{cases}.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

65. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}$ **.**

66. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^3-6x^2+x-5\right)$**.**

67. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{3x^2-4x-4}$**.**

68. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$ **.**

69. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+2x-x^2}{2x^2-x}$**.**

70. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$**.**

71. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$**.**

72. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$**.**

73. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$**.**

74. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}$**.**

75. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$**.**

76. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{|x|-x}{x}$**.**

77. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\pm 0}f(x)$ **za funkciju** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & , \quad x>0\\ x+1 & , \quad x\le 0\end{cases}$**.**

78. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$**.**

79. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ **.**

80. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$**.**

81. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin x}{x}$**.**

82. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-3x^2}{\sin x}$**.**

83. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$ **.**

84. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{-x}$ **.**

85. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{x}$ **.**

86. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ **.**

87. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$**.**

88. Zadatak: **Odrediti vrednost parametra** A **tako da funkcija**

$$f(x)=\begin{cases}(2-x)\dfrac{\sin x}{3x} & , \quad x\neq 0\\ A & , \quad x=0\end{cases}$$ **bude neprekidna.**

89. Zadatak: **Odrediti vrednost parametra** A **tako da funkcija**

$$f(x)=\begin{cases}e^{x}\dfrac{\sin 5x}{x} & , \quad x\neq 0\\ A & , \quad x=0\end{cases}$$ **bude neprekidna.**

90. Zadatak: **Odrediti vrednost parametra** A **tako da funkcija**

$$f(x)=\begin{cases}\left(x^2+1\right)\dfrac{\sin x}{x} & , \quad x\neq 0\\ A & , \quad x=0\end{cases}$$ **bude neprekidna.**

3. Diferencijalni račun

3.1. Izvod i diferencijal funkcije

Definicija: *Diferencijalni količnik (ili prvi izvod)* $y' = \frac{dy}{dx}$ *funkcije* $y = f(x)$ *u tački* x_0 *je granična vrednost količnika* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *kada* $\Delta x \to 0$*, odnosno:*

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Definicija: *Ako je funkcija* $y = f(x)$ *diferencijabilna u tački* x_0*, tada prava sa koeficijentom pravca* $y'(x_0)$ *koja prolazi kroz tačku* (x_0, y_0) *je tangenta funkcije* $y = f(x)$ *u tački* x_0*. Jednačina tangente je:* $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Prema tome geometrijsko značenje prvog izvoda je: *prvi izvod funkcije u tački* x_0 *je koeficijent pravca tangente povučene na krivu u tački* x_0.

Nalaženje diferencijalnog količnika (prvog izvoda) zovemo *diferenciranjem*.

Definicija: *Ako je funkcija* $y = f(x)$ *diferencijabilna, tada je* $f'(x) = \frac{dy}{dx}$*, a odavde se dobija prvi diferencijal funkcije:* $dy = f'(x)\,dx$.

Pravila diferenciranja

Ako je c konstanta, $u = u(x)$ i $v = v(x)$ su diferencijabilne funkcije, tada važe sledeća pravila diferenciranja:

1. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Izvod složene funkcije

Ako su $y = f(u)$ i $u = g(x)$ diferencijabilne funkcije, tada izvod složene funkcije $y = f(u) = f(g(x))$ dobija se po formuli: $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = y'_u \cdot u'_x$ ili $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Tablica izvoda elementarnih funkcija

1. $(const)' = 0$

2. $(x)' = 1$

3. $(x^n)' = n\,x^{n-1}$

4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $(\sin x)' = \cos x$

6. $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

8. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$

10. $(\arccos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$

11. $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$

12. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

13. $(a^x)' = a^x \ln a$

14. $(e^x)' = e^x$

15. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

16. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$

17. $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$

18. $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$

19. $(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$

20. $(\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

21. $(\mathrm{Arsh}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

22. $(\mathrm{Arch}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(|x| > 1)$

23. $(\mathrm{Arth}x)' = \frac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$

24. $(\mathrm{Arcth}x)' = -\frac{1}{x^2-1}$ $(|x| > 1)$

67. Primer: **Po definiciji naći prvi izvod funkcije** $y = x^2 + 1$**.**

Rešenje: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x,$$

prvi izvod funkcije $y = x^2 + 1$ je znači $y' = 2x$.

68. Primer: **Po definiciji naći prvi izvod funkcije** $y = \sqrt{x+2}$**.**

Rešenje: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x} \cdot \dfrac{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x + 2 - x - 2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

69. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y = x^7$ **.**

Rešenje: Primenom tablice izvoda elementarnih funkcija i pravila diferenciranja, dobićemo da je: $y' = 7x^6$**.**

70. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y = \sqrt[3]{x}$ **.**

Rešenje:

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} .$$

***71. Primer*:** **Naći prvi izvod funkcije** $y = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$**.**

Rešenje:

$$y = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} = 2x^{-\frac{3}{4}}$$

$$y' = 2\left(-\frac{3}{4}\right) x^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{2\sqrt[4]{x^7}} = \frac{3}{2x\sqrt[4]{x^3}} .$$

72. Prime: **Naći prvi izvod funkcije** $y = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}}$ **.**

Rešenje: $y=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}}=\sqrt[36]{x}=x^{\frac{1}{36}}$

$$y'=\frac{1}{36}x^{\frac{1}{36}-1}=\frac{1}{36}x^{-\frac{35}{36}}=\frac{1}{36\sqrt[36]{x^{35}}}$$

73. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=\sqrt{x}\left(5x-x^3\right)$**.**

Rešenje: $y=\sqrt{x}\left(5x-x^3\right)$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(5x-x^3\right)+\sqrt{x}\left(5-3x^2\right)=\frac{5x-x^3+10x-6x^3}{2\sqrt{x}}=\frac{15x-7x^3}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{15}{2}\sqrt{x}-\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}\ .$$

74. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=\dfrac{2x^2+3x}{4x-6}$**.**

Rešenje: $y=\dfrac{2x^2+3x}{4x-6}=\dfrac{u}{v}$

$$y'=\frac{(4x+3)(4x-6)-\left(2x^2+3x\right)4}{(4x-6)^2}=\frac{16x^2-24x+12x-18-8x^2-12x}{(4x-6)^2}=$$

$$=\frac{8x^2-24x-18}{(4x-6)^2}=\frac{2\left(4x^2-12x-9\right)}{(4x-6)^2}.$$

75. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=2\sin x-3\cos x$**.**

Rešenje: $y'=2\cos x-3(-\sin x)=2\cos x+3\sin x$.

76. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=\sqrt{x}\cdot\sin x$**.**

Rešenje: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x$.

77. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=(3x+7)^2$.

Rešenje: Funkcija $y=(3x+7)^2$ je složena funkcija, na osnovu pravila diferenciranja složene funkcije dobijamo: $y'=2(3x+7)^{2-1}\cdot(3x+7)'=2(3x+7)3=6(3x+7)$.

78. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=\sin\sqrt{5x}$**.**

Rešenje: $y'=\cos\sqrt{5x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{5x}}\cdot 5=\dfrac{5\cos\sqrt{5x}}{2\sqrt{5x}}$.

***79. Primer*: Naći prvi izvod funkcije** $y = \mathrm{tg}(\sin 5x)$**.**

Rešenje: $y' = \dfrac{1}{\cos^2(\sin 5\mathrm{x})} \cdot \cos 5x \cdot 5 = \dfrac{5\cos 5x}{\cos^2(\sin 5x)}$.

***80. Primer:* Naći prvi izvod funkcije** $y = 5\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 3e^{2x}$**.**

Rešenje: $y' = 5\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 3e^{2x} \cdot 2 = 5e^{x} - 6e^{2x}$.

***81. Primer:* Naći prvi izvod funkcije** $y = \mathrm{a}^{\mathrm{x}} + \dfrac{1}{2}a^{-x} + a^{2x}$.

Rešenje: $y' = \mathrm{a}^{\mathrm{x}} \ln a + \dfrac{1}{2}a^{-x} \ln a \cdot (-1) + a^{2x} \ln a \cdot 2 = \ln a\left(a^{x} - \dfrac{1}{2}a^{-x} + 2a^{2x}\right)$.

***82. Primer*: Naći prvi izvod funkcije** $y = 3^{\frac{1}{\mathrm{x}+1}}$**.**

Rešenje: $y = 3^{\frac{1}{\mathrm{x}+1}} \cdot \ln 3 \cdot \left(\dfrac{1}{x+1}\right)' = 3^{\frac{1}{\mathrm{x}+1}} \cdot \ln 3 \cdot \dfrac{0-1}{(x+1)^2} = \dfrac{-\ln 3}{(x+1)^2} \cdot 3^{\frac{1}{\mathrm{x}+1}}$.

***83. Primer:* Naći prvi izvod funkcije** $y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}}$**.**

Rešenje: $y' = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}} \cdot \left(e^{2x}\right)' = e^{e^{2x}} \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}e^{e^{2x}}$.

***84. Primer*: Naći prvi izvod funkcije** $y = \sin \mathrm{e}^{\mathrm{x}^2}$.

Rešenje: $y' = \cos \mathrm{e}^{x^2} \cdot \left(e^{x^2}\right)' = \cos e^{x^2} \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2} \cos e^{x^2}$.

***85. Primer*: Naći prvi izvod funkcije** $y = 5\ln\mathrm{x} + 3\ln 2\mathrm{x}$**.**

Rešenje: $y' = 5 \cdot \dfrac{1}{\mathrm{x}} + 3 \cdot \dfrac{1}{2\mathrm{x}} \cdot 2 = \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{8}{x}$.

***86. Primer:* Naći prvi izvod funkcije** $y = \ln(3\mathrm{x} + 4)$**.**

Rešenje: $y' = \dfrac{1}{(3\mathrm{x}+4)} \cdot 3 = \dfrac{3}{3x+4}$.

***87. Primer:* Naći prvi izvod i prvi diferencijal funkcije** $y = \ln\left(\sin^2\mathrm{x}\right)$**.**

Rešenje: $y' = \dfrac{1}{\sin^2\mathrm{x}} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot (\sin x)' = \dfrac{2}{\sin x} \cdot \cos x = 2\mathrm{ctg}x$

je prvi izvod funkcije, dok je $dy = 2\mathrm{ctg}x\,dx$ prvi diferencijal.

88. Primer: **Naći prvi izvod i diferncijal funkcije** $y = \log(2x+3)$**.**

Rešenje: $y' = \dfrac{1}{(2x+3)\ln 10} \cdot (2x+3)' = \dfrac{2}{(2x+3)\ln 10}$,

$dy = \dfrac{2}{(2x+3)\ln 10} dx$.

89. Primer: **Naći prvi izvod i diferencijal funkcije** $y = e^{2x} \ln 2x$**.**

Rešenje: $y' = e^{2x} \cdot 2 \cdot \ln 2x + e^{2x} \dfrac{1}{2x} \cdot 2 = e^{2x}\left(2\ln 2x + \dfrac{1}{x}\right)$,

$dy = e^{2x}\left(2\ln 2x + \dfrac{1}{x}\right)dx$.

90. Primer: **Naći prvi izvod i diferencijal funkcije** $y = e^{2x+\ln 2x}$**.**

Rešenje: $y = e^{2x+\ln 2x} = e^{2x} \cdot e^{\ln 2x} = e^{2x} \cdot 2x = 2xe^{2x}$

$y' = 2\left(e^{2x} + xe^{2x} \cdot 2\right) = 2e^{2x}(1+2x)$,

$dy = 2e^{2x}(1+2x)dx$.

91. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y = x^x$**.**

Rešenje: $y = x^x$, nepoznata se nalazi i u osnovi i u izložiocu, zato logaritmujemo izraz:

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x \qquad / \dfrac{d}{dx}$

$\dfrac{1}{y} y' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

$y' = y(\ln x + 1)$

$y' = x^x(\ln x + 1)$.

92. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y = (5-2x)^x$**.**

Rešenje: $y = (5-2x)^x$

$\ln y = x \ln(5-2x)$

$\dfrac{1}{y} y' = \ln(5-2x) + x \dfrac{1}{5-2x} \cdot (-2)$

$y' = y\left[\ln(5-2x) - \dfrac{2x}{5-2x}\right]$

$y' = (5-2x)^x\left[\ln(5-2x) - \dfrac{2x}{5-2x}\right]$.

93. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y = (6-x^2)^{x^2}$**.**

Rešenje: $y=\left(6-\mathrm{x}^{2}\right)^{x^{2}}$

$$\ln y=x^{2}\ln\left(6-x^{2}\right)$$

$$\frac{1}{y}y'=2x\ln\left(6-x^{2}\right)+x^{2}\frac{1}{6-x^{2}}\cdot(-2x)$$

$$y'=y\left[2x\ln\left(6-x^{2}\right)-\frac{2x^{3}}{6-x^{2}}\right]$$

$$y'=\left(6-x^{2}\right)^{x^{2}}\left[2x\ln\left(6-x^{2}\right)-\frac{2x^{3}}{6-x^{2}}\right].$$

94. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=x^{\cos x}$**.**

Rešenje: $\ln y=\cos x\ln x$

$$\frac{1}{y}y'=-\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=y\left[-\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$y'=x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\cdot\ln x\right).$$

95. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=(\ln 2x)^{3x^{2}}$**.**

Rešenje: $\ln y=3x^{2}\ln(\ln 2x)$

$$\frac{1}{y}y'=6x\cdot\ln(\ln 2x)+3x^{2}\cdot\frac{1}{\ln 2x}\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2$$

$$y'=y\left(6x\ln(\ln 2x)+\frac{3x}{\ln 2x}\right)$$

$$y'=(\ln 2x)^{3x^{2}}\left(6x\ln(\ln 2x)+\frac{3x}{\ln 2x}\right).$$

ZADACI ZA VEŽBU:

91. Zadatak: **Po definiciji naći prvi izvod funkcije** $y=x^{2}+x+2$**.**

92. Zadatak: **Po definiciji naći prvi izvod funkcije** $y=\sqrt{3x-4}$**.**

93. Zadatak: **Naći prvi izvod funkcije** $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^{3}}}$**.**

94. Zadatak: **Naći prvi izvod funkcije** $y=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{2}$**.**

95. Zadatak: **Naći prvi izvod funkcije** $y = \sqrt{3x^2 + 5x - 6}$ **.**

96. Zadatak: **Naći prvi izvod funkcije** $y = \ln\left(\cos x \cdot \sin^2 2x\right)$**.**

97. Zadatak: **Naći prvi izvod funkcije** $y = x^{\sin x}$ **.**

98. Zadatak: **Naći prvi izvod funkcije** $y = \left(\sqrt{x}\right)^{x^2}$ **.**

99. Zadatak: **Naći prvi izvod i diferencijal funkcije** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ **.**

100. Zadatak: **Naći prvi izvod i diferencijal funkcije** $y = \arcsin\dfrac{1}{x^2}$ **.**

3.2. Izvodi višeg reda

Definicija: *Ako je prvi izvod funkcije $y = f(x)$ još jednom diferencijabilan, tada se dobija drugi izvod i drugi diferencijal funkcije $y = f(x)$. Slično se dobija treći, četvrti,... itd. izvod.*

Izvode višeg reda obeležavamo sa :

$$y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, ..., y^{(n)}$$

ili

$$f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)} ..., f^{(n)}$$

odnosno

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}, ..., \frac{d^ny}{dx^n} \quad .$$

96. Primer: **Odrediti izvode višeg reda za funkciju** $y = \ln x$ **.**

Rešenje:

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y'' = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$y''' = 2 \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$y^{(4)} = -6 \cdot x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \quad .$$

97. Primer: **Odrediti izvode višeg reda funkcije** $y = \sin x$**.**

***Rešenje:*¸** $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) .$$

98. Primer: **Odrediti izvode višeg reda funkcije** $y = e^{3+4x}$.

Rešenje: $y = e^{3+4x}$

$$y' = e^{3+4x} \cdot 4 = 4 \cdot e^{3+4x}$$

$$y'' = 4 \cdot e^{3+4x} \cdot 4 = 16 \cdot e^{3+4x} = 4^2 \cdot e^{3+4x}$$

$$y''' = 16 \cdot e^{3+4x} \cdot 4 = 64 \cdot e^{3+4x} = 4^3 \cdot e^{3+4x}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = 4^n \cdot e^{3+4x} \textbf{.}$$

ZADACI ZA VEŽBU:

101. Zadatak: **Odrediti izvode višeg reda funkcije** $y = \cos x$**.**

102. Zadatak: **Odrediti izvode višeg reda funkcije** $y = \sin 5x$**.**

103. Zadatak: **Odrediti izvode višeg reda funkcije** $y = \sqrt{x}$ **.**

104. Zadatak: **Odrediti izvode višeg reda funkcije** $y = a^x$**.**

105. Zadatak: **Odrediti izvode višeg reda funkcije** $y = x^n$ **.**

3.3. Lopitalovo pravilo

Lopitalovo pravilo omogućuje lakše izračunavanje graničnih vrednosti neodređenog oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema: *Neka su funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *diferencijabilne u okolini tačke* $x = a$ *i neka je* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *ili* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$. *Ako je u toj okolini* $g(x) \neq 0$ *i* $g'(x) \neq 0$ *i granična vrednost* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *postoji (ili je* $\pm\infty$ *), tada i granična vrednost* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *postoji (ili je* $\pm\infty$ *), i važi da je:* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

99. Primer: **Naći graničnu vrednost** $\lim_{x\to 2} \frac{\ln \frac{x}{2}}{x-2}$ **.**

Rešenje: $$\lim_{x\to 2} \frac{\ln \frac{x}{2}}{x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}}{1} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} .$$

100. Primer: **Naći graničnu vrednost** $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{3(x-1)}$ **.**

Rešenje: $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{3(x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{3} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{3x} = \frac{2}{3\cdot 1} = \frac{2}{3} .$$

101. Primer: **Naći graničnu vrednost** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ **.**

Rešenje: $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1 .$$

102. Primer: **Naći graničnu vrednost** $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg} x}{x}$ **.**

Rešenje: $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \frac{1}{1+0} = 1 .$$

103. Primer: **Naći graničnu vrednost** $\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 7^x}{x}$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-7^x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x\ln 5-7^x\ln 7}{1}=\ln 5-\ln 7=\ln\dfrac{5}{7}$.

104. Primer: **Naći graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}7x}{x}$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}7x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 7x}\cdot 7}{1}=\dfrac{7}{1}=7$.

105. Primer: **Naći graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2^x\ln 2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2^x(\ln 2)^2}=\dfrac{2}{\infty}=0$.

106. Primer: **Naći graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\dfrac{1}{\infty}=0$.

107. Primer: **Naći graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{\infty}{2}=\infty$.

108. Primer: **Naći graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\dfrac{-1}{\sin^2 x}}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\dfrac{\sin x}{x}=$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot 1=-\sin 0=0$.

Ispitivanje neodređenih izraza tipa $0\cdot\infty$***: ako je*** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ ***i*** $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$***, tada ispitivanje granične vrednosti*** $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]$ ***treba svesti na jedan od sledeća dva oblika:*** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ ***ili*** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ ***koji su već odgovarajuci tipovi*** $\dfrac{0}{0}$ ***ili*** $\dfrac{\infty}{\infty}$ ***.***

109. Primer: **Odrediti graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to+0} 2x\ln x$ **.**

Rešenje:
$$\lim_{x\to+0} 2x\ln x=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{2\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=-2\lim_{x\to+0} x=-2\cdot 0=0\ .$$

110. Primer: **Odrediti graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0} 5x\mathrm{ctg}3x$ **.**

Rešenje:
$$\lim_{x\to 0} 5x\mathrm{ctg}3x=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\mathrm{tg}3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5}{\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3}=\frac{5}{3}\ .$$

111. Primer: **Odrediti graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$ **.**

Rešenje:
$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=\left(\infty\cdot 0\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0\ .$$

Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$***, tada je granična vrednost*** $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]$ ***neodređen izraz oblika*** $\infty-\infty$***; može se izračunati ako se svede na graničnu vrednost oblika*** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$***, koji je već odgovarajućeg tipa*** $\dfrac{0}{0}$ ***.***

112. Primer: **Odrediti graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1\cdot\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

113. Primer: **Odrediti graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+(\cos x-x\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

114. Primer: **Odrediti graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}$.

Granične vrednosti neodređenog oblika eksponencijalnog tipa $1^{\infty},\infty^{0},0^{0}$ ***prvo logaritmujemo, a posle rešavamo graničnu vrednost tipa*** $0\cdot\infty$**.**

115. Primer: **Odrediti graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}$ **.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}=\left(0^{0}\right)=\lim\limits_{x\to +0}y$ gde je

$y=x^{\sin x}$ koju funkciju logaritmujemo

$\ln y=\ln x^{\sin x}$ na osnovu pravila logaritmovanja

$\ln y=\sin x\ln x$ a granična vrednost ovog izraza je

$$\lim_{x\to +0}(\ln y)=\ln\left(\lim_{x\to +0}y\right)=\lim_{x\to +0}(\sin x\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{tg}x = -1\cdot 0 = 0,$$

znači da je $\ln\left(\lim\limits_{x\to+0} y\right) = 0$

odavde je $\lim\limits_{x\to+0} y = e^0$,

sledi da je $\lim\limits_{x\to+0} y = 1$,

odnosono $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x} = 1$.

***116. Primer:* Odrediti graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{2}{3+4\ln x}}$.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{2}{3+4\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim\limits_{x\to+0} y$

$$y = x^{\frac{2}{3+4\ln x}}$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{2}{3+4\ln x}} = \frac{2}{3+4\ln x}\ln x$$

$$\lim_{x\to+0}(\ln y) = \ln\left(\lim_{x\to+0} y\right) = \lim_{x\to+0}\frac{2\ln x}{3+4\ln x} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{4}{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+0} y = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to+0} x^{\frac{2}{3+4\ln x}} = \sqrt{e}\ .$$

***117. Primer:* Odrediti graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.**

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \left(1^\infty\right) = \lim\limits_{x\to 0} y$

$$y = (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

$$\ln y = \frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x)$$

$$\lim_{x\to 0}(\ln y) = \ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} 3\,\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x} =$$

$$= -6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{1}{\cos 2x} = -6\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x} = -6\cdot 1 = -6$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = -6$$

$$\lim_{x\to 0} y = e^{-6}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{e^6} .$$

ZADACI ZA VEŽBU:

106. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6} .$$

107. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$ **.**

108. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}$ **.**

109. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{tg}x-\sin x} .$$

110. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}5x}$ **.**

111. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^5}$ **.**

112. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ **.**

113. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to +0}\frac{\ln(\sin mx)}{\ln\sin x},\ (m>0) .$$

114. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\mathrm{ctg}x .$$

115. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} \text{ .}$$

116. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 0}(\arcsin x \operatorname{ctg} x) \text{ .}$$

117. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 1}\ln x \ln(x-1) \text{ .}$$

118. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right) \text{ .}$$

119. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right] \text{ .}$$

120. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) \text{ .}$$

121. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right) \text{ .}$$

122. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to +0} x^x$ **.**

123. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to +0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$ **.**

124. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ **.**

125. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$ **.**

4. Ispitivanje funkcija

Cilj ispitivanja funkcije je crtanje njenog grafika. Zato ispitujemo njene najvažnije osobine, razne asimpote, ekstremne vrednosti, intervale monotonosti, tačke prevoja, konveksne i konkavne lukove. Poznavajući ove osobine možemo da utvrdimo kako se menja funkcija, i ako je potrebno možemo izračunati vrednosti funkcije još u nekim tačkama. Grafik funkcije crtamo spajajući obeležene tačke, uzevši u obzir ispitane osobine.

Ispitivanje funkcija ćemo izvoditi na osnovu sledećih tačaka u datom redosledu:

1. *Oblast definisanosti:* D_f.

2. *Parnost:* $f(-x) = \pm f(x)$ *i*
Periodičnost: $f(x+\omega) = f(x)$ *(samo kod trigonometrijskih funkcija).*

3. *Nule:* $y = 0$.

4. *Znak:* $y > 0$ *ili* $y < 0$.

5. *Asimptote: vertikalna: VA, horizontalna: HA, kosa: KA.*

6. *Ekstremne vrednosti (stacionarne tačke):* $y' = 0$.

7. *Tok (rast i opadanje):* $y' > 0$ *ili* $y' < 0$.

8. *Prevojne tačke:* $y'' = 0$.

9. *Konveksnost, konkavnost:* $y'' > 0$ *ili* $y'' < 0$.

10. *Grafik.*

Obilnije o nekim tačkama:

1. Ispitivanje funkcije uvek počinjemo sa utvrđivanjem njene oblasti definisanosti, naime u onim tačkama ili intervalima u kojima funkcija nije definisana ni ne vršimo ispitivanje osobina.

2. Parnost ili neparnost ispitujemo kod svih funkcija, maime kod parnih i neparnih funkcija dovoljno je ispitivati osobine na polovini oblasti definisanosti, zbog simetričnosti grafik se može u celosti crtati.
Periodičnost se ispituje samo kod trigonometrijskih funkcija.

3. Nule funkcije su one tačke u kojima grafik seče x-osu. Ordinate ovih tačaka su 0, znači da se mogu odrediti rešavanjem jednačine $y=0$.

4. Kod crtanja grafika funkcije bitno je nad kojim intervalima će grafik biti iznad x-ose (tu je funkcija $y>0$) i nad kojim će intervalima biti ispod x-ose (tu je funkcija $y<0$).

5. Razlikujemo tri vrste asimptota, u zavisnosti od toga kakvog je položaja prava kojoj funkcija teži:

VA: vertikalna asimptota je prava $x=a$, ako je $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, gde je a tačka prekida funkcije ili je konačan kraj oblasti definisanosti.

HA: horizontalna asimptota je prava $y=b$, ako je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$.

FA: kosa asimptota je prava $y=kx+n$ kosog položaja, gde je $k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$ gde je $k\neq 0$ i $k\neq\infty$.

6. Stacionarne tačke ili mogući ekstremi su one tačke u kojima je $y'=0$. Da li su te tačke stvarno ekstremi i koje su vrste (maksimumi ili minimumi), određuje se na osnovu 7. tačke, gde se iz odgovarajuće tablice mugu pročitati vrste ekstrema.

7. Tok ili monotonost funkcije ispitujemo pomoću predznaka prvog izvoda. Ako je u nekom intervalu $f'(x)>0$ tada je u tom intervalu $f(x)\uparrow$ (rastuća), a ako je u nekom intervalu $f'(x)<0$ tada je u tom intervalu $f(x)\downarrow$ (opadajuća). Funkcija dostiže lokalni maksimum u tački u kojoj prelazi iz rastuće u opadajuću, a lokalni minimum u tački, u kojoj iz opadajuće funkcije prelazi u rastuću.

8. Tačkama prevoja nazivamo one tačke u kojima konveksni luk krive prelazi u konkavni luk, ili obrnuto. U tačkama prevoja važi da je $y''=0$. Moguće prevojne tačke zato dobijamo rešavanjem jednačine $y''=0$. Koje su tačke od svih rešenja ove jednačine stvarni prevoji, lako se može pročitati iz tablice koju ispitujemo pod tačkom 9. za konveksnost funkcije.

9. Luk krive na nekom intervalu može biti konveksan ili konkavan. Ova osobina zavisi od predznaka drugog izvoda na posmatranom intervalu. Ako je na nekom intervalu $f''(x)>0$ tada je na tom intervalu $f(x)\cup$ (konveksna), a ako je na nekom intervalu $f''(x)<0$ tada je na tom intervalu $f(x)\cap$ (konkavna).

10. Na osnovu ispitanih osobina i određenih karakterističnih tačaka crtamo grafik funkcije.

118. Primer: **Ispitati tok i nacrtati grafik racionalne funkcije** $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ **.**

Rešenje: Ispitaćemo funkciju na osnovu prethodnih tačaka.

1.) *Oblast definisanosti:*

$x-1\neq 0$

$x\neq 1$

$D_f=R\setminus\{1\}.$

2.) *Parnost:*

$f(-x)=\dfrac{-2x-1}{(-x-1)^2}=-\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}\neq \pm f(x)$, funkcija nije ni parna ni neparna.

3.) *Nule:*

$y=0$

$\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=0$

$2x-1=0$

$x=\dfrac{1}{2}$, funkcija ima jednu nulu u tački $N\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

4.) *Znak:*

$y>0$ ili $y<0$

$\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}>0$ ili $\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}<0$

x	$-\infty$ *0.5*	*0.5* *1*	*1* $+\infty$
2x-1	-	+	+
y	-	+	+

5.) *Asimptote:*

VA: $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{(1-0-1)^2}=\dfrac{1}{+0}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{(1+0-1)^2}=\dfrac{1}{+0}=+\infty$

HA: $y=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{-\infty}=0$

KA: *nema*

jer ima horizontalnu asimptotu.

6.) Ekstremne vrednosti:

$$y' = 0$$

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1) - 2(2x-1)}{(x-1)^3} = \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3} = 0$$

odavde je

$$-2x = 0$$

sledi

$x = 0$ je stacionarna tačka (mogući ekstrem).

7.) Tok:

$y' > 0$ ili $y' < 0$

$\frac{-2x}{(x-1)^3} > 0$ ili $\frac{-2x}{(x-1)^3} < 0$

x	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
-2x	+	-	-
$(x-1)^3$	-	-	+
y'	-	+	-
y	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

Iz tablice možemo pročitati da funkcija ima lokalni minimum u tački $x = 0$, a minimalna vrednost je

$y_{\min}(0) = -1$.

$Min(0,1)$.

Funkcija u tački $x = 1$ ima prekid.

8.) Prevojne tačke:

$$y'' = 0$$

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 2x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-2(x-1) + 6x}{(x-1)^4} = \frac{-2x+2+6x}{(x-1)^4} = \frac{4x+2}{(x-1)^4} = 0$$

$$4x + 2 = 0$$

$x = -\frac{1}{2}$ je moguća prevojna tačka.

9.) Konveksnost i konkavnost:

$y'' > 0$ ili $y'' < 0$

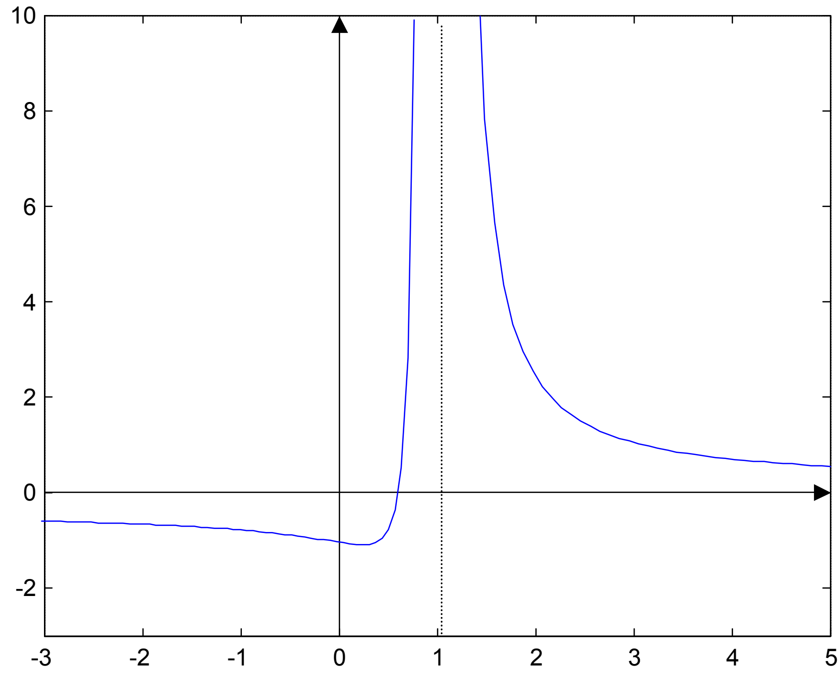
$4x + 2 > 0$ ili $4x + 2 < 0$

x	$-\infty$ -0.5	-0.5 1	1 $+\infty$
4x+2	-	+	+
$(x-1)^4$	+	+	+
y''	-	+	+
y	$\cap$	$\cup$	$\cup$

Iz tablice čitamo da funkcija ima prevoj u tački $x=-\frac{1}{2}$ čija je druga kordinata
$y_{prevoj}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-1-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{-2}{\frac{9}{4}}=-\frac{8}{9}$.

Sledi da je $P(-\frac{1}{2},-\frac{8}{9})$ prevojna tačka.

10.)*Grafikon:*



119. Primer: **Ispitati tok i nacrtati grafik iracionalne funkcije** $y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$ **.**

Rešenje: Ispitivanje funkcije radićemo po utvrđenim tačkama.

1.) *Oblast definisanosti:*
Izložilac korena je neparan broj, prema tome potkorena veličina može biti bilo kog znaka. Potkorena veličina je polinom trećeg reda koji je definisan za sve realne brojeve, prema tome:

$$D_f=R.$$

2.) *Parnost:*

$f(-x)=\sqrt[3]{2x^2-(-x)^3}=\sqrt[3]{2x^2+x^3}\neq\pm f(x)$ funkcija nije ni parna ni neparna.

3.) *Nule:*

$$y=0$$

$$\sqrt[3]{2x^2 - x^3} = 0$$
$$2x^2 - x^3 = 0$$
$$x^2(2-x) = 0$$
$$x^2 = 0 \quad \vee \quad 2 - x = 0$$
$$x_{1/2} = 0 \quad \vee \quad x_3 = 2 \quad ,$$

funkcija znači ima dve nule, tačke $N_1(0,0)$ i $N_2(2,0)$.

4.) *Znak:*

$$y > 0 \text{ ili } y < 0$$
$$\sqrt[3]{x^2(2-x)} > 0 \text{ ili } \sqrt[3]{x^2(2-x)} < 0$$

predznak funkcije zavisi samo od faktora $2 - x$:

x	$-\infty \quad 0$	$0 \quad 2$	$2 \quad +\infty$
2-x	+	+	–
y	+	+	–

5.) *Asimptote:*

VA: *nema*
jer funkcija nema prekidnu tačku, niti su krajevi oblasti definisanosti konačni.

HA: *nema*

jer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2(2-x)} = \sqrt[3]{+\infty \cdot (-\infty)} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$

i $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2(2-x)} = \sqrt[3]{+\infty \cdot (+\infty)} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$

FA: $y = -x + \dfrac{2}{3}$

jer $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2}{x} - 1} = \sqrt[3]{0-1} = -1$

i $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x\right) = (-\infty + \infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + \sqrt[3]{x^3}\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + \sqrt[3]{x^3}\right)\frac{\sqrt[3]{\left(2x^2 - x^3\right)^2} - \sqrt[3]{x^3\left(2x^2 - x^3\right)} + \sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{\left(2x^2 - x^3\right)^2} - \sqrt[3]{x^3\left(2x^2 - x^3\right)} + \sqrt[3]{x^6}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{4x^4 - 4x^5 + x^6} - \sqrt[3]{2x^5 - x^6} + \sqrt[3]{x^6}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{4}{x} + 1} - \sqrt[3]{\dfrac{2}{x} - 1} + \sqrt[3]{1}\right)} =$$

$$= \frac{2}{1 - (-1) + 1} = \frac{2}{3} \quad .$$

6. *Ekstremne vrednosti:*

$$y' = 0$$

$$y' = \frac{1}{3}\left(2x^2 - x^3\right)^{-2/3}\left(4x - 3x^2\right) = \frac{x(4-3x)}{3\cdot\sqrt[3]{\left(2x^2 - x^3\right)^2}} = \frac{x(4-3x)}{3x\sqrt[3]{x(2-x)^2}} = \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} = 0$$

$$4 - 3x = 0$$

$x = \frac{4}{3}$ je stacionarna tačka.

Za prvi izvod moramo konstatovati da nije definisan u tačkama $x = 0$ i $x = 2$, mada je sama funkcija bila definisana na celom skupu realnih brojeva R.

7.) *Tok i monotonost:*

$$y' > 0 \quad \text{ili} \quad y' < 0$$

$$\frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} > 0 \quad \text{ili} \quad \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} < 0$$

x	$-\infty$ 0	0 4/3	4/3 $+\infty$
$\sqrt[3]{x}$	-	+	+
4-3x	+	+	-
y'	-	+	-
y	↓	↑	↓

Iz tablice možemo čitati da u stacionarnoj tački $x = \frac{4}{3}$ funkcija ima lokalni maksimum, dok u tački $x = 0$ funkcija ima minimum oblika špic, naime u toj tački prvi izvod nije definisan ali menja znak.

$$y_{\max}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3} \approx 1.06$$

$$Max\left(\frac{4}{3};1.06\right).$$

8.) *Prevojne tačke:*

$$y'' = 0$$

$$y' = \frac{1}{3}(4-3x)\left(4x - 4x^2 + x^3\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left[-3\left(4x - 4x^2 + x^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(4-3x)\left(4x - 4x^2 + x^3\right)^{-\frac{4}{3}}\left(4 - 8x + 3x^2\right)\right]$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left[\frac{-3}{\sqrt[3]{4x - 4x^2 + x^3}} - \frac{(4-3x)\left(4 - 8x + 3x^2\right)}{3\left(4x - 4x^2 + x^3\right)\sqrt[3]{4x - 4x^2 + x^3}}\right]$$

$$y'' = \frac{1}{3}\cdot\frac{-9\left(4x - 4x^2 + x^3\right) - (4-3x)\left(4 - 8x + 3x^2\right)}{3\left(4x - 4x^2 + x^3\right)\sqrt[3]{4x - 4x^2 + x^3}}$$

$$y'' = \frac{1}{9} \cdot \frac{-36x + 36x^2 - 9x^3 - 16 + 32x - 12x^2 + 12x - 24x^2 + 9x^3}{\left(4x - 4x^2 + x^3\right)\sqrt[3]{4x - 4x^2 + x^3}}$$

$$y'' = \frac{1}{9} \cdot \frac{8x - 16}{\left(4x - 4x^2 + x^3\right)\sqrt[3]{4x - 4x^2 + x^3}} = \frac{-8(2-x)}{9x(2-x)^2\sqrt[3]{x(2-x)^2}}$$

$$y'' = \frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}} \neq 0$$

a to znači da funkcija nema prevojnu tačku. Ni drugi izvod funkcije nije definisan u $x = 0$ i $x = 2$, a to znači da y'' u tim tačkama može da menja svoj predznak, odnosno funkcija može da menja konveksnost.

9.) *Konveksnost:*

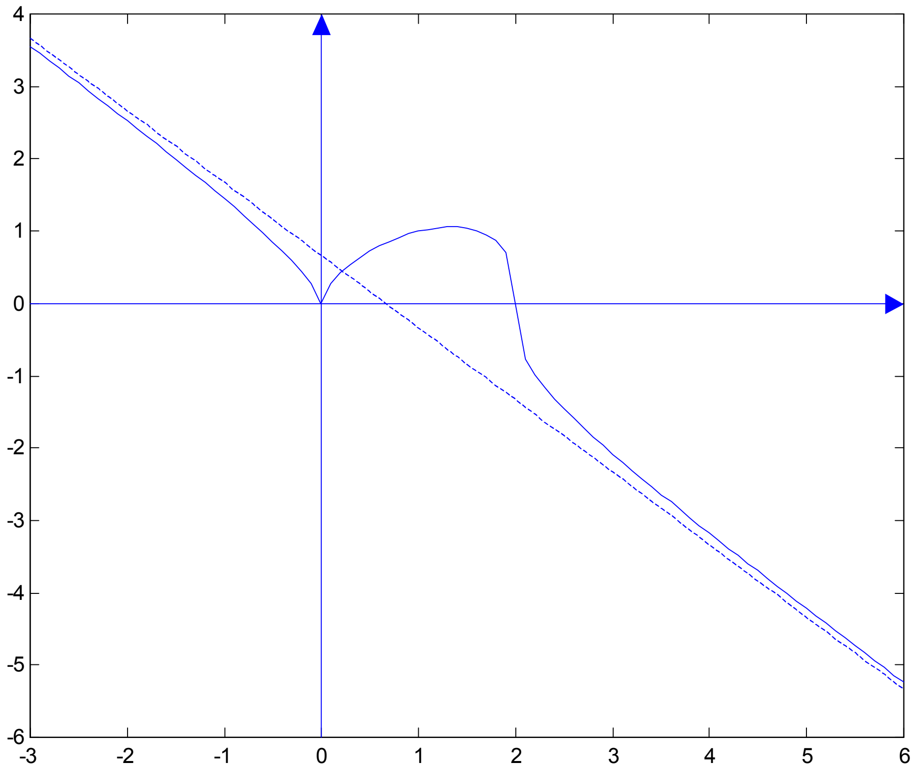
$$y'' > 0 \quad \text{ili} \quad y'' < 0$$

$$\frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}} > 0 \quad \text{ili} \quad \frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}} < 0$$

x	$-\infty$ 0	0 2	2 $+\infty$
$x-2$	-	-	+
y''	-	-	+
y	$\cap$	$\cap$	$\cup$

Znači da funkcija menja konveksnost u tački $(2,0)$, mada u toj tački drugi izvod nije definisan.

10.)*Grafikon:*



120. Primer: **Ispitati tok i nacrtati grafik eksponencijalne funkcije** $y = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}$.

Rešenje: Ispitivanje ćemo raditi po utvrđenim tačkama.

1.) *Oblast definisanosti:*
Eksponencijalna funkcija je definisana ako je izložilac definisan, zato:

$$x^2 - 3x - 4 \neq 0$$
$$x_1 = -1 \;\vee\; x_2 = 4$$
$$D_f = R \setminus \{-1, 4\}$$

2.) *Parnost:*

$f(-x) = e^{\frac{1}{x^2+3x-4}} \neq \pm f(x)$, funkcija nije ni parna ni neparna.

3.) *Nule:*

$$y = 0$$

$e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \neq 0$, funkcija nema nule.

4.) *Znakl:*

$y > 0$ ili $y < 0$

$e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} > 0$, $\forall x \in D_f$,

$y > 0$, $\forall x \in D_f$, funkcija je pozitivna u svakoj tački oblasti definisanosti.

5.) *Asimptote:*

VA: $x = -1$ i $x = 4$

$$\lim_{x \to -1-0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} = e^{\frac{1}{1+2\cdot 0+0^2+3+3\cdot 0-4}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1+0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} = e^{\frac{1}{1-2\cdot 0+0^2+3-3\cdot 0-4}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 4-0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} = e^{\frac{1}{16-8\cdot 0+0^2-12+3\cdot 0-4}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 4+0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} = e^{\frac{1}{16+8\cdot 0+0^2+12+3\cdot 0-4}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty$$

HA: $y = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

FA: *nema*
jer ima horizontalnu asimptotu.

***6.)** Ekstremne vrednosti:*

$$y' = 0$$

$$y' = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \frac{-(2x-3)}{\left(x^2-3x-4\right)^2} = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$x = \dfrac{3}{2}$ je stacionarna tačka..

***7.)** Tok:*

$y' > 0$ ili $y' < 0$

$$e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \frac{3-2x}{\left(x^2-3x-4\right)^2} > 0 \quad \text{ili} \quad e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \frac{3-2x}{\left(x^2-3x-4\right)^2} < 0$$

x	$-\infty$ -1	-1 3/2	3/2 4	4 $+\infty$
3-2x	+	+	-	-
y'	+	+	-	-
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

Iz tablice čitamo da funkcija u stacionarnoj tački $x = \dfrac{3}{2}$ ima lokalni minimum:

$$y_{\max}\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{-4}{25}} = \frac{1}{\sqrt[25]{e^4}} \approx 0.85$$

$$Max\left(\frac{3}{2}\,;\,0.85\right)$$

***8.)** Prevojne tačke:*

$$y'' = 0$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\left(\frac{3-2x}{\left(x^2-3x-4\right)^2}\right)^2 + e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\,\frac{-2\left(x^2-3x-4\right)^2-(3-2x)2\left(x^2-3x-4\right)(2x-3)}{\left(x^2-3x-4\right)^4}$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \left(\frac{(3-2x)^2}{\left(x^2-3x-4\right)^4} + \frac{-2\left(x^2-3x-4\right)^2+2(3-2x)^2\left(x^2-3x-4\right)}{\left(x^2-3x-4\right)^4}\right)$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \left(\frac{(3-2x)^2\left(1+2x^2-6x-8\right)-2\left(x^2-3x-4\right)^2}{\left(x^2-3x-4\right)^4}\right)$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \frac{(3-2x)^2\left(2x^2-6x-7\right)-2\left(x^2-3x-4\right)^2}{\left(x^2-3x-4\right)^4}$$

$$(3-2x)^2\left(2x^2-6x-7\right)-2\left(x^2-3x-4\right)^2 = 0$$

$$6x^4 - 36x^3 + 60x^2 - 18x - 95 = 0$$

$x_1 \approx -0.9$, $x_2 = 3.9$ (ostala dva korena su kompleksna).

9.)Konveksnost:

$$y'' > 0 \quad \text{ili} \quad y'' < 0$$

$$6x^4 - 36x^3 + 60x^2 - 18x - 95 > 0 \quad \text{ili} \quad 6x^4 - 36x^3 + 60x^2 - 18x - 95 < 0$$

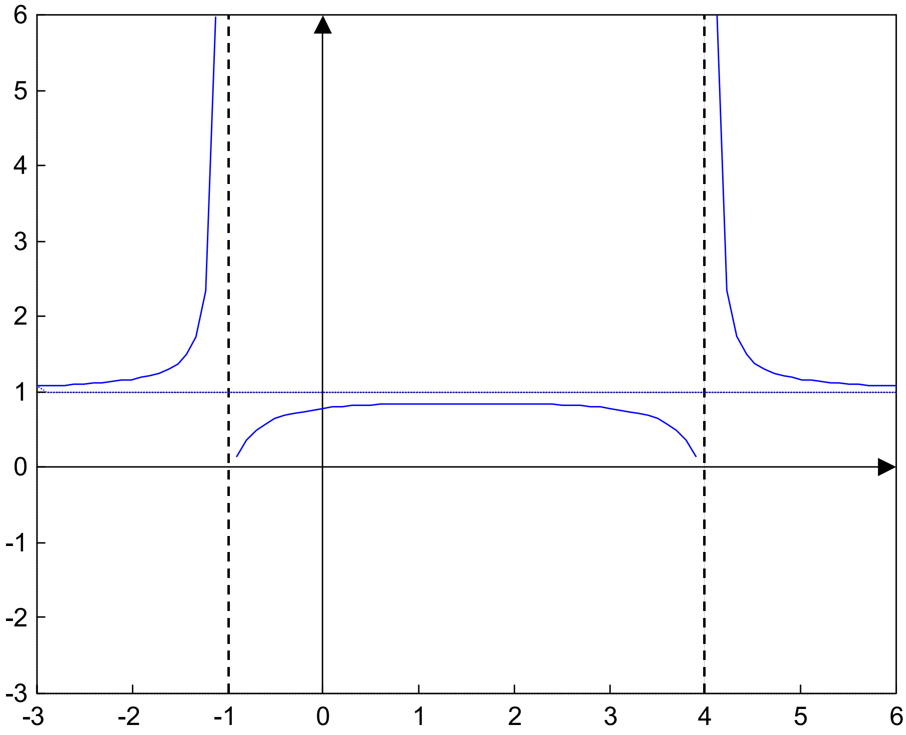
x	$-\infty$ -1	-1 -0.9	-0.9 3.9	3.9 4	4 $+\infty$
$6x^4 - 36x^3 + 60x^2 - 18x - 95$	+	+	–	+	+
y''	+	+	–	+	+
y	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

Prema tome funkcija ima dve prevojne tačke:

$$y_{prevoj}(-0.9) \approx 0.13 \quad , \quad y_{prevoj}(3.9) \approx 0.13$$

Prevojne tačke su znači: $P_1(-0.9\,;\ 0.13)$ i $P_2(3.9\,;\ 0.13)$.

10.)Grafikon:



121. Primer: **Ispitati tok i nacrtati grafik logaritamske funkcije** $y = x^4 \ln\frac{1}{x}$ **.**

Rešenje: Ispitivanje funkcije radimo po utvrđenim tačkama.

1.) Oblast definisanosti:

Logaritamska funkcija je definisana samo za pozitivne argumente, pa mora biti:

$\frac{1}{x} > 0$ odavde je

$x > 0$ oblast definisanosti je znači:

$D_f : x \in (0,+\infty)$

***2.)** Parnost:*

$$f(-x) = (-x)^4 \ln\left(\frac{1}{-x}\right) = x^4 \ln\left(-\frac{1}{x}\right) \text{ nije ni definisano,}$$

jer $-\frac{1}{x} < 0$, a logaritam negativnog broja nije definisan. Funkcija nije ni parna ni neparna.

***3.)** Nule:*

$y = 0$

$x^4 \ln\frac{1}{x} = 0$

$x^4 = 0 \quad \vee \quad \ln\frac{1}{x} = 0$ odavde je

$x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{x} = 1$ odnosno

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 1$

Funkcija ima dve nule, tačke $N_1(0,0)$ i $N_2(1,0)$.

***4.)** Znak:*

$y > 0$ ili $y < 0$

$x^4 \ln\frac{1}{x} > 0$ ili $x^4 \ln\frac{1}{x} < 0$

x	$0 \quad\quad 1$	$1 \quad +\infty$
$\ln\frac{1}{x}$	+	-
y	+	-

***5.)** Asimptote:*

***VA:** nema*

$$\text{jer je} \quad \lim_{x\to+0} x^4 \ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+0} \frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{4}{x^5}} = \lim_{x\to+0} \frac{x^5}{4x} = \lim_{x\to+0} \frac{x^4}{4} = 0$$

***HA:** nema*

$$\text{jer je} \quad \lim_{x\to+\infty} x^4 \ln\frac{1}{x} = \infty \cdot \ln 0 = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

***FA:** nema*

$$\text{jer je} \quad k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x^3 \ln\frac{1}{x} = -\infty\,,$$

u ovom slučaju ne postoji kosa asimptota (zbog ∞), pa se n ni ne računa.

6.) *Ekstremne vrednosti:*

$$y' = 0$$

$$y' = 4x^3 \ln\frac{1}{x} + x^4 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x^3 \ln\frac{1}{x} - x^3 = x^3\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right) = 0$$

$x^3 = 0 \quad \vee \quad 4\ln\frac{1}{x} - 1 = 0$ odavde je

$x_1 = 0 \quad \vee \quad \ln\frac{1}{x} = \frac{1}{4}$

$x_1 = 0 \notin D_f$, ali iz $\frac{1}{x} = e^{\frac{1}{4}}$ sledi da je

$x = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0.78$ stacionarna tačka funkcije.

7.) *Tok:*

$y' > 0$ ili $y' < 0$

$x^3\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right) > 0$ ili $x^3\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right) < 0$

x	$0 \quad e^{-1/4}$	$e^{-1/4} \quad +\infty$
x^3	$+$	$+$
$4\ln\frac{1}{x} - 1$	$+$	$-$
y'	$+$	$-$
y	$\uparrow$	$\downarrow$

Iz tablice čitamo da u stacionarnoj zački $x = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ funkcija ima lokalni maksimum:

$$y_{\max}(e^{-\frac{1}{4}}) = \left(e^{-\frac{1}{4}}\right)^4 \cdot \ln\frac{1}{e^{-\frac{1}{4}}} = e^{-1} \cdot \ln e^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4e} \approx 0.09$$

$$Max\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, 0.09\right)$$

8.) *Prevojne tačke:*

$$y'' = 0$$

$$y'' = 3x^2\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right) + x^3 \cdot 4 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y'' = 12x^2 \ln\frac{1}{x} - 3x^2 - 4x^2$$

$$y'' = 12x^2 \ln\frac{1}{x} - 7x^2$$

$y'' = x^2\left(12\ln\frac{1}{x} - 7\right) = 0$ ako je

$x^2 = 0$ ili $12\ln\frac{1}{x} - 7 = 0$ odavde je

$x = 0 \notin D_f$, i $\ln\frac{1}{x} = \frac{7}{12}$ odnosno

$\frac{1}{x} = e^{\frac{7}{12}}$ znači

$x = \frac{1}{e^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{e^7}} \approx 0.56$ je stacionarna tačka funkcije.

9.) *Konveksnost:*

$y'' > 0$ ili $y'' < 0$

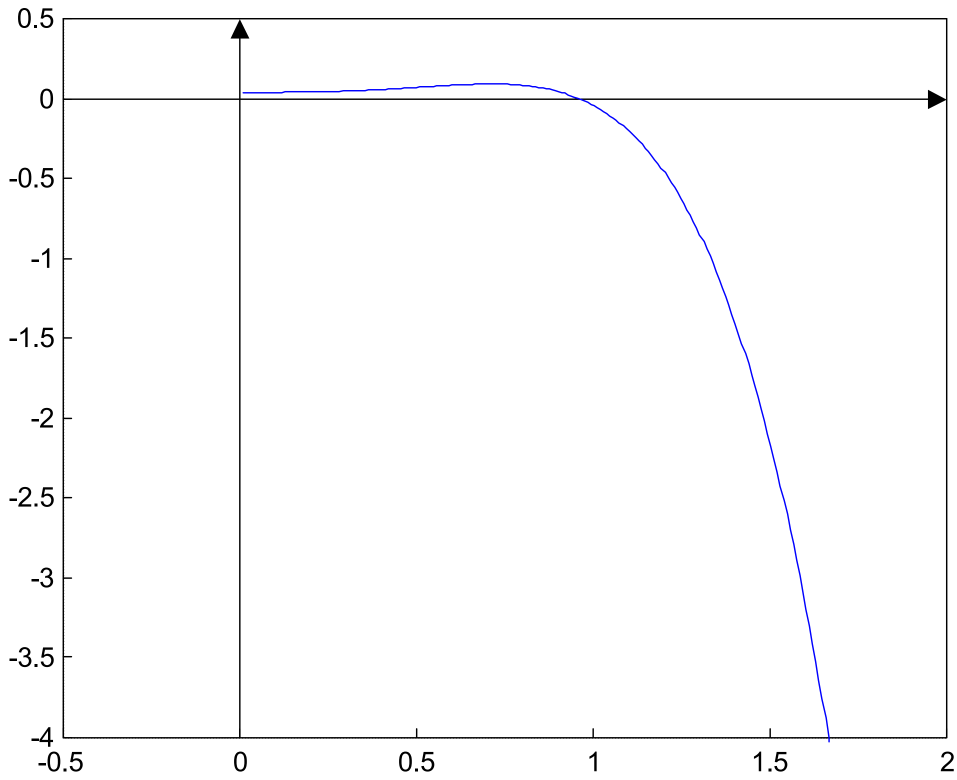
$x^2\left(12\ln\frac{1}{x} - 7\right) > 0$ ili $x^2\left(12\ln\frac{1}{x} - 7\right) < 0$

x	$0 \quad e^{-7/12}$	$e^{-7/12} \quad +\infty$
$12\ln\frac{1}{x} - 7$	$+$	$-$
y''	$+$	$-$
y	$\cup$	$\cap$

Iz tablice čitamo da je $x = \frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}$ prevojna tačka funkcije, jer u ovoj tački kriva menja konveksnost: $y_{\inf}\left(\frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}\right)^4 \ln\sqrt[12]{e^7} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^7}} \cdot \frac{7}{12} \approx 0.056$.

Prevojna tačka je $P(0.56\,;\,0.056)$.

10.)*Grafikon:*



122. Primer: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$**.**

Rešenje: Ispitivaćemo funkciju po predviđenim tačkama.

1.) *Oblast definisanosti:*
Funkcija *arctgx* je definisana za sve argumente, zato postavljamo samo jedan uslov za određivanje oblasti definisanosti:

$x \neq 0$

$D_f = R \setminus \{0\}$.

2.) *Parnost:*

$f(-x) = arctg\left(1-\frac{1}{x}\right) \neq \pm f(x)$, funkcija nije ni parna ni neparna.

3.) *Nule:*

$y = 0$

$\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ **za**

$1+\frac{1}{x} = 0$ odavde je

$\frac{1}{x} = -1$ odnosno

$x = -1$, funkcija znači ima jednu nulu, tačku $N(-1,0)$.

4.) *Znakl:*

$y > 0$ ili $y < 0$

$\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0$ ili $\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) < 0$

x	$-\infty$ -1	-1 0	0 $+\infty$
y	$+$	$-$	$+$

5.) *Asimptote:*

VA: *nema*

$$\lim_{x\to -0} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to +0} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

HA: $y = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to \infty} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$$

FA: *nema*
jer ima horizontalnu.

6.) *Ekstremne vrednosti:*

$$y' = 0$$

$$y' = \frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2+(x+1)^2} \neq 0,$$

a to znači da funkcija nema lokalne ekstreme.

7.) *Tok:*

$$y' > 0 \quad \text{ili} \quad y' < 0$$

$$\frac{-1}{x^2+(x+1)^2} > 0 \ \text{ ili } \ \frac{-1}{x^2+(x+1)^2} < 0$$

x	$-\infty$ 0	0 $+\infty$
y'	$-$	$-$
y	$\downarrow$	$\downarrow$

Iz tablice čitamo da je funkcija u čitavoj oblasti definisanosti opadajuća i nema ekstreme.

8.) *Prevojne tačke:*

$$y'' = 0$$

$$y'' = \frac{2x+2(x+1)}{\left(x^2+x^2+2x+1\right)^2} = \frac{4x+2}{\left(2x^2+2x+1\right)^2} = 0 \ \text{ ako je}$$

$4x+2=0$ odnosno

$x = -\frac{1}{2}$ je moguća prevojna tačka.

9.) *Konveksnost:*

$$y'' > 0 \quad \text{ili} \quad y'' < 0$$

$$\frac{4x+2}{\left(2x^2+2x+1\right)^2} > 0 \ \text{ ili } \ \frac{4x+2}{\left(2x^2+2x+1\right)^2} 0$$

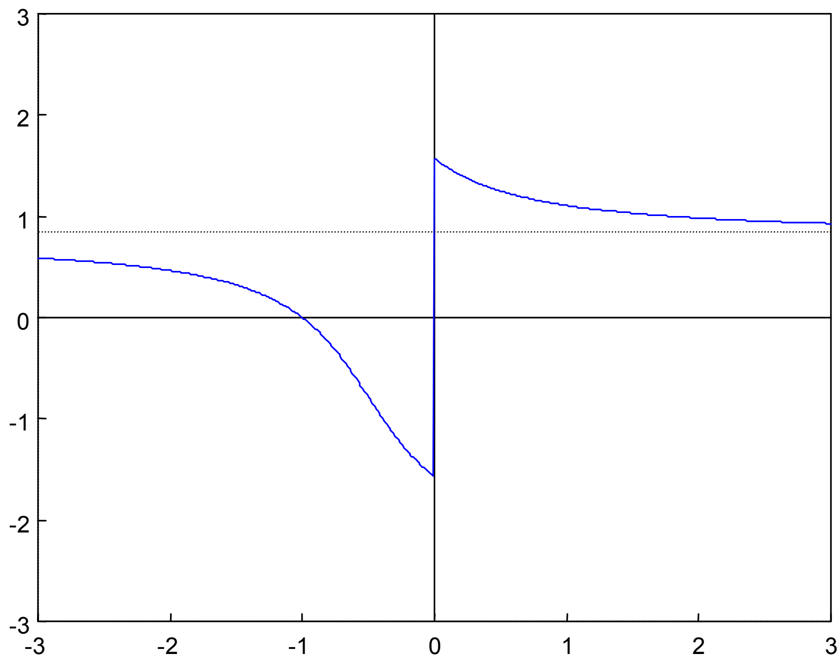
x	$-\infty$ $-1/2$	$-1/2$ 0	0 $+\infty$
$4x+2$	-	+	+
y''	-	+	+
y	$\cap$	$\cup$	$\cup$

Iz tablice čitamo da je $x = -\frac{1}{2}$ prevojna tačka funkcije, i:

$$y_{\inf}\left(-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg}(1-2) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Prevojna tačka je znači $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$.

10.)Grafikon:



ZADACI ZA VEŽBU:

126. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = x^3 - 3x^2$.

127. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \left|x - x^2\right| - x$.

128. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$.

129. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = x + \dfrac{1}{x}$.

130. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$.

131. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$.

132. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$ **.**

133. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$ **.**

134. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ **.**

135. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = x \cdot e^{-x}$ **.**

136. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = e^{8x - x^2 - 14}$ **.**

137. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = (2 + x^2)e^{-x^2}$ **.**

138. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **.**

139. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \frac{x}{\ln x}$ **.**

140. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = (x+1)\ln^2(x+1)$ **.**

141. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \ln(1 + e^{-x})$ **.**

142. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = x \cdot \mathrm{arctg} x$ **.**

143. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = x + 2\mathrm{arctg} x$ **.**

144. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \frac{x}{2} + \mathrm{arctg} x$ **.**

145. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = x^x$ **.**

5. Neodređeni integrali

Definicija: *Ako je funkcija* $f(x)$ *neprekidna nad nekim intervalom, i u svakoj tački tog intervala važi da je* $F'(x) = f(x)$, *tada je* $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, *gde je* c *nepoznata konstanta, a* $F(x)$ *je primitivna funkcija od funkcije* $f(x)$. *Primitivnu funkciju drugačije zovemo i neodređenim integralom podintegralne funkcije, a postupak nalaženja svih primitivnih funkcija postupkom integraljenja.*

Neodređeni integral je inverzna operacija od diferenciranja, znači da pravila integraljenja možemo da izvedemo iz pravila diferenciranja. Najednostavnija pravila su:

Pravila integraljenja:

1. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

2. $\int df(x)\,dx = f(x) + c$

3. $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx \quad , \quad c = const.$

4. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Bez obzira da je integraljenje obrnuta operacija od diferenciranja, postupak integraljenja se ipak ne može tako "šablonski" izvoditi kao postupak diferenciranja. Podintegralnu funkciju uvek treba dovesti na takav oblik, na koji se može primeniti neka formula ili smena. Baš zbog toga, da bismo naučili "integraliti" moramo jako puno zadataka da vežbamo. Nikad ne treba zaboraviti da se rezultat integrala može kontrolisati, naime izvod primitivne funkcije uvek mora biti podintegralna funkcija.

Kod integraljenja složenih funkcija podintegralnu funkciju treba svesti na integral neke jednostavnije funkcije. To se može postići odgovarajućim smenama. Najednostavnije integrale, takozvane tablične integrale, dobijamo iz tablice izvoda elementarnih funkcija, tako da izvode elementarnih funkcija uzimamo za podintegralne funkcije:

Tablica osnovnih integrala

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4. $\int e^x dx = e^x + c$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \quad , \quad (a > 0 \, , \, a \neq 1)$

6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

7. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + c$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + c$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + c$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$

13. $\int \mathrm{sh} x \, dx = \mathrm{ch} x \, dx + c$

14. $\int \mathrm{ch} x \, dx = \mathrm{sh} x \, dx + c$

15. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + c$

16. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + c$

Prvo ćemo rešiti nekoliko integrala u kojima treba primeniti samo pravila i tablične integrale:

123. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int 5a^2x^6dx$ **.**

Rešenje: $\int 5a^2x^6dx = 5a^2\int x^6dx = 5a^2\frac{x^7}{7}+c = \frac{5a^2}{7}x^7+c$.

124. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \sqrt{2px}dx$ **.**

Rešenje: $\int \sqrt{2px}dx = \sqrt{2p}\int \sqrt{x}dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2p}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c =$

$= \frac{2\sqrt{2p}}{3}\sqrt[2]{x^3}+c = \frac{2\sqrt{2p}}{3}x\sqrt{x}+c.$

125. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int (6x^2+8x+3)dx$ **.**

Rešenje: $\int (6x^2+8x+3)dx = 6\int x^2dx + 8\int x\,dx + 3\int dx = 6\frac{x^3}{3}+8\frac{x^2}{2}+3x+c =$

$= 2x^3+4x^2+3x+c.$

126. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}dx$ **.**

Rešenje: $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{n}}dx = \frac{x^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}+c = \frac{n}{n-1}x^{\frac{n}{n-1}}+c = \frac{n}{n-1}\sqrt[n-1]{x^n}+c = \frac{nx\cdot\sqrt[n-1]{x}}{n-1}+c.$

127. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int 3^xe^xdx$ **.**

Rešenje: $\int 3^xe^xdx = \int (3e)^xdx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)}+c = \frac{(3e)^x}{\ln 3+\ln e}+c = \frac{3^xe^x}{1+\ln 3}+c.$

128. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ **.**

Rešenje: $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c\,.$$

5.1. Integraljenje metodom smene promenljivih

Neka je $x = \varphi(t)$, gde je t nova promenljiva. Pretpostavimo da je diferencijalni količnik funkcije $x = \varphi(t)$, funkcija $\varphi'(t)$ neprekidna na nekom zatvorenom intervalu, i da je $\varphi'(t) \neq 0$ .Tada važi da je:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,.$$

Pomoću ove formule možemo rešavati neodređene integrale metodom smene promenljivih. Funkciju φ treba birati tako, da desna strana formule bude što jednostavnija.

129. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int (1+x)^6\,dx$ **.**

Rešenje: $$\int (1+x)^6\,dx = \begin{vmatrix} 1+x=t \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + c = \frac{1}{7}(1+x)^7 + c\,.$$

130. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$ **.**

Rešenje: $$\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \begin{vmatrix} x-2=t \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = \frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2(x-2)^2} + c\,.$$

131. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{x^2+9}$ **.**

Rešenje: $$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} = \begin{vmatrix} \frac{x}{3}=t \\ dx = 3dt \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\int \frac{3dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + c\,.$$

132. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \sin(2x+3)dx$ **.**

Rešenje: $$\int \sin(2x+3)dx = \left| \begin{array}{l} 2x+3=t \\ 2dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}(-\cos t)+c = -\frac{1}{2}\cos(2x+3)+c\,.$$

133. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ **.**

Rešenje: $$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{2}=t \\ dx=2dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \operatorname{tg} t + c = \operatorname{tg}\frac{x}{2}+c\,.$$

134. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$ **.**

Rešenje: $$\int \frac{xdx}{3-2x^2} = \left| \begin{array}{l} 3-2x^2=t \\ -4xdx=dt \\ xdx=-\dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{4}}{t} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{4}\ln|t|+c = -\frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2\right|+c\,.$$

135. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int x^2\sqrt{x^3-9}\,dx$ **.**

Rešenje: $$\int x^2\sqrt{x^3-9}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^3-9=t \\ 3x^2dx=dt \\ x^2dx=\dfrac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{9}\sqrt{t^3}+c =$$

$$= \frac{2}{9}t\sqrt{t}+c = \frac{2}{9}\left(x^3-9\right)\sqrt{x^3-9}+c\,.$$

136. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$ **.**

Rešenje: $$\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{t}} + c = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} + c\,.$$

137. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx$ **.**

Rešenje: $$\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx = \left| \begin{array}{c} e^x+x=t \\ \left(e^x+1\right)dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|e^x+x\right| + c\,.$$

138. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{\ln x}{x}dx$ **.**

Rešenje: $$\int \frac{\ln x}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \dfrac{dx}{x}=dt \end{array} \right| = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}\ln^2 x + c\,.$$

139. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \sin^5 x \cos x\, dx$ **.**

Rešenje: $$\int \sin^5 x\cos x\,dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{6}\sin^6 x + c\,.$$

140. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^2 x+3}$ **.**

Rešenje: $$\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^2 x+3} = \left| \begin{array}{c} \sin^2 x+3=t \\ 2\sin x\cos x\,dx = dt \\ \sin^2 x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|\sin^2 x+3\right| + c =$$

$$= \ln\left(\sin^2 x+3\right) + c\,.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

Metodom smene promenljivih rešiti sledeće intgerale:

146. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ **smenom** $\sqrt{x-1}=t$ **.**

147. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$ **smenom** $5x-2=t$ **.**

148. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ **smenom** $\sqrt{x+1}=t$ **.**

149. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ **smenom** $\sin x=t$ **.**

150. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **.**

151. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int (a+bx)^n\,dx$ **.**

152. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}$ **ako je** $a>0$**.**

153. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ **.**

154. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int (a+bx^2)^n\,x\,dx$ **.**

155. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ **ako je** $a>0$**.**

156. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \sin^n x\cos x\,dx$ **.**

157. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n}$ **ako je** $n\neq 1$**.**

158. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \mathrm{tg}x\,dx$ **.**

159. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \mathrm{ctg}x\,dx$ **.**

160. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int a^{6x}dx$ **ako je** $a>0$**.**

161. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int e^{ax+b}dx$ **.**

162. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int x\sin(x^2+1)dx$ **.**

163. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{x(\ln x)^5}$ **.**

164. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{\mathrm{tg}x+3\mathrm{tg}^2x+5\mathrm{tg}^3x}{\cos^2 x}dx$ **.**

165. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$ **smenom** $x^2=t$ **.**

5.2. Parcijalna integracija

Ako funkcije $u=f(x)$ *i* $v=g(x)$ *imaju neprekidne izvode nad nekim intervalom, tada u tom intervalu važi formula za parcijalnu integraciju:* $\int u\,dv = u\,v-\int v\,du$.

Primenom ove formule računamo neodređene integrale nekih proizvoda, naime integral $\int u\,dv$ svodi se na integral $\int v\,du$, za koji se pretpostavlja da se može lakše rešiti od prethodnog integrala. Formula se primenjuje tako, da podintegralnu funkciju uzimamo kao jedan proizvod, gde se jedan faktor bira za u a drugi za dv. Iz faktora u diferenciranjem dobijamo faktor du, a integraljenjem faktora dv računamo v, koji se posle uvrštavaju u formulu za parcijalnu integraciju. Za faktor u po mogućnosti treba birati takav faktor, koji se diferenciranjem pojednostavljuje, a za dv faktor koji se može integraliti.

141. Primer: **Parcijalnom integracijom rešiti neodređeni integral** $\int x e^x dx$ **.**

Rešenje:

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u=x & dv=e^x dx \\ du=dx & v=\int e^x dx = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = e^x(x-1)+c\,.$$

142. Primer: **Parcijalnom integracijom rešiti neodređeni integral** $\int \ln x\,dx$ **.**

Rešenje:

$$\int \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\int dx = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c =$$

$$= x(\ln x - 1) + c\,.$$

143. Primer: **Parcijalnom integracijom rešiti neodređeni integral** $\int x\,\mathrm{sh}x\,dx$ **.**

Rešenje:

$$\int x\,\mathrm{sh}x\,dx = \begin{vmatrix} u=x & dv=\mathrm{sh}x\,dx \\ du=dx & v=\int \mathrm{sh}x\,dx=\mathrm{ch}x \end{vmatrix} = x\,\mathrm{ch}x - \int \mathrm{ch}x\,dx = x\,\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x + c\,.$$

144. Primer: **Parcijalnom integracijom rešiti neodređeni integral** $\int \dfrac{x^2 dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ **.**

Rešenje:

$$\int \frac{x^2 dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \begin{vmatrix} u=x & dv=\dfrac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2} \\ du=dx & v=\int \dfrac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2} = \begin{vmatrix} 1+x^2=t \\ xdx=\dfrac{dt}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt}{t^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-1}{t} = \dfrac{-1}{2\left(1+x^2\right)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}x - \frac{x}{1+x^2}\right) + c\,.$$

145. Primer: **Parcijalnom integracijom rešiti neodređeni integral** $\int e^x \sin x\,dx$ **.**

Rešenje: $$\int e^x \sin x\,dx = \begin{vmatrix} u=\sin x & dv=e^x dx \\ du=\cos x\,dx & v=\int e^x dx = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u=\cos x & dv=e^x dx \\ du=-\sin x\,dx & v=\int e^x\,dx = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx\right)$$

ako napišemo samo početak i kraj, tada dobijamo da je

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx + c$$

a odavde je

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x (\sin x - \cos x) + c$$

rešenje početnog integrala je prema tome:

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c\, .$$

ZADACI ZA VEŽBU:

Metodom parcijalne integracije rešiti sledeće neodređene integrale:

166. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \operatorname{arctg} x\, dx$ **.**

167. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \arcsin x\, dx$ **.**

168. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int x \cdot 2^{-x}\, dx$ **.**

169. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{x}{e^x}\, dx$ **.**

170. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int x^2 \ln x\, dx$ **.**

171. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \ln^2 x\, dx$ **.**

172. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int x \cos 3x\, dx$ **.**

173. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int e^x \cos x\, dx$ **.**

174. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int 3^x \sin x\, dx$ **.**

175. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$ **.**

5.3. Integral racionalne funkcije

Racionalne funkcije se mogu predstaviti kao količnik dva polinoma: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$*. Ako je* $Q(x)=const.$ *tada je funkcija* $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *u stvari samo jedan polinom, čije integraljenje ne predstavlja nikakvu teškoću. Ako jepolinom* $Q(x)$ *nižeg reda od polinoma* $P(x)$*, tada funkcija* $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *nije prava racionalna funkcija (već je neprava). U ovom slučaju polinom* $P(x)$ *treba podeliti sa polinomom* $Q(x)$*, i na taj način izdvojiti celi deo i pravi razlomljeni deo:* $f(x)=P_1(x)+\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$*. Prema tome integraljenje bilo koje racionalne funkcije* $f(x)$ *možemo da svedemo na integral jednog polinoma i na integral jedne prave racionalne funkcije. Integral prave racionalne funkcije najčešće možemo integraliti ako prethodno datu funkciju rastavimo na parcijalne sabirke, zatim ih integralimo član po član.*

146. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+5x}$ **.**

Rešenje: Podintegralna funkcija $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x}$ je parava racionalna funkcijaum kojem se imenilac može faktorisati, pa je:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{x^2+5x}=\int\frac{dx}{x(x+5)}.$$

Prema uputsvu, rastavimo podintegralnu funkciju na zbir parcijalnih sabiraka:

$$\frac{1}{x(x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+5}$$

$$1=A(x+5)+x$$

$$1=Ax+5A+Bx$$

$$1=(A+B)x+5A$$

dva polinoma su jednaka ako su jednaki odgovarajući koeficijenti:

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ 5A\quad&=1 \end{aligned}$$

a rešenja ovog sistema su:

$$A=\frac{1}{5}$$

$$B=-\frac{1}{5}$$

znači da funkciju $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x}$ možemo rastaviti na zbir parcijalnih sabiraka na sledeći način: $f(x)=\dfrac{1}{5x}-\dfrac{1}{5(x+5)}$. Nastavljamo postupak integraljenja:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{5x}-\int\frac{dx}{5(x+5)}$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+5}=\begin{vmatrix}x+5=t\\ dx=dt\end{vmatrix}$$

smena se odnosi samo na drugi integral,

$$\mathbf{I}=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t}$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{5}\ln|t|+c=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{t}\right|+c=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right|+c$$

$$\int\frac{dx}{x(x+5)}=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right|+c\,.$$

147. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$ **.**

Rešenje: Podintegralna funkcija je neprava racionalna funkcija $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}$, zato deljenjem brojioca sa imeniocem izdvajamo celi deo i pravi razlomljeni deo:

$$\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{7x-5}{x^2-3x+2}$$

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\int x\,dx+\int 3\,dx+\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx$$

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+\mathbf{I}$$

gde je

$$\mathbf{I}=\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx$$

integral prave racionalne funkcije, a podintegralnu funkciju razbijamo na zbir parcijalnih sabiraka:

$$\frac{7x-5}{x^2-3x+2}=\frac{7x-5}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$$

$$7x-5=A(x-1)+B(x-2)$$

$$7x-5=Ax-A+Bx-2B$$

$$7x-5=(A+B)x-A-2B$$

odavde izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{array}{l} A+\ \ B=7 \\ \underline{-A-2B=-5} \\ -B=2 \ \Rightarrow\ B=-2 \\ \qquad\qquad A=9 \end{array}$$

znači

$$\mathbf{I}=\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx=\int\frac{9dx}{x-2}-\int\frac{2dx}{x-1}=9\int\frac{dx}{x-2}-2\int\frac{dx}{x-1}$$

neka je smena u prvom integralu $\begin{vmatrix} x-2=t \\ dx=dt \end{vmatrix}$,

a smena u drugom integralu $\begin{vmatrix} x-1=z \\ dx=dz \end{vmatrix}$,

tada je

$$\mathbf{I}=9\int\frac{dt}{t}-2\int\frac{dz}{z}=9\ln|t|-2\ln|z|+c$$

odnosno

$$\mathbf{I}=9\ln|x-2|-2\ln|x-1|+c$$

a rešenje integrala je:

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+9\ln|x-2|-2\ln|x-1|+c\,.$$

148. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx$ **.**

Rešenje: $\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx=\int\frac{1-3x}{2(x^2-2x+1)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1-3x}{(x-1)^2}dx$

Podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija, odmah rastavljamo na zbir parcijalnih sabiraka:

$$\frac{1-3x}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$$

$$1-3x=A(x-1)+B$$

$$1-3x=Ax-A+B$$

odavde izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata računamo vrednosti nepoznatih A i B,

$$\begin{array}{l} A \qquad = -3 \\ -A+B=1 \\ \hline B=-2 \\ A=-3 \end{array}$$

Posle rastavljanja na zbir parcijalnih sabiraka treba da rešimo sledeće neodređene integrale:

$$\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{-3}{x-1}dx+\int\frac{-2}{(x-1)^2}dx\right)$$

$$\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx=\frac{-3}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\begin{vmatrix} x-1=t \\ dx=dt \end{vmatrix}$$

$$\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{3}{2}\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}+c=-\frac{3}{2}\ln|t|+\frac{1}{t}+c$$

$$\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2}\ln|x-1|+c\,.$$

149. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{x+3}{x^2-2x+5}dx$ **.**

Rešenje: Imenilac podintegralne funkcije ne možemo rastaviti na linearne faktore jer diskriminanta kvadratne jednačine $x^2-2x+5=0$ je negativna: $D=-16<0$, pa jednačina nema realne korene. U ovakvim slučajevima imenilac treba svesti na kanonički oblik, posle čega odgovorajućom smenom možemo rešiti dati integral.

$$\int\frac{x+3}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{x+3}{(x^2-2x+1)-1+5}dx=\int\frac{x+3}{(x-1)^2+4}dx=\begin{vmatrix} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{t+4}{t^2+4}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t+8}{t^2+4}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+4}+4\int\frac{dt}{t^2+4}=\begin{vmatrix} t^2+4=z \\ 2tdt=dz \end{vmatrix}=$$

navedenu smenu ćemo primeniti u prvom integralu, a drugi integral možemo svesti na tablični integral,

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}+\frac{4}{4}\int\frac{dt}{\frac{t^2}{4}+1}=\frac{1}{2}\ln|z|+\int\frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}=\left|\begin{matrix}\frac{t}{2}=s\\ dt=2ds\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+4\right|+\int\frac{2ds}{s^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+4\right|+2\operatorname{arctg}s+c=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+4\right|+2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+c=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|(x-1)^2+4\right|+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+c$$

rešenje je znači

$$\int\frac{x+3}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+c\,.$$

150. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{1}{2x^2-3x+11}dx$ **.**

Rešenje: Imenilac podintegralne funkcije nema realne korene, jer kvadratna jednačina $2x^2-3x+11=0$ ima negativnu diskriminantu $D=-79<0$. Zbog toga podintegralnu funkciju ne možemo rastaviti na zbir parcijalnih sabiraka, postupamo slično kao u prethodnom zadatku.

$$\int\frac{1}{2x^2-3x+11}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{11}{2}}=\left|\begin{matrix}x-\frac{3}{4}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{79}{16}}=\frac{1}{2\cdot\frac{79}{16}}\int\frac{dt}{\frac{16t^2}{79}+1}=\frac{8}{79}\int\frac{dt}{\left(\frac{4t}{\sqrt{79}}\right)^2+1}=\left|\begin{matrix}\frac{4t}{\sqrt{79}}=z\\ dt=\frac{\sqrt{79}}{4}dz\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{8}{79}\cdot\frac{\sqrt{79}}{4}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}z+c=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\frac{4t}{\sqrt{79}}+c=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\frac{4\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{79}}+c=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{79}}+c$$

rešenje je znači

$$\int\frac{1}{2x^2-3x+11}dx=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\sqrt{79}}x-\frac{3}{\sqrt{79}}\right)+c\,.$$

151. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$ **.**

Rešenje: Podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija, jer je brojilac polinom četvrtog stepena a imenilac polinom petog stepena. Polinom x^2+2x+2 u imeniocu se ne može rastaviti na linearne faktore, znači da funkciju rastavljamo na parcijalne sabirke u obliku u kojem je i zadat:

$$\frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$\begin{aligned}4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=&A(x^2+2x+2)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+2x+2)+\\&+(Dx+E)(x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=&A(x^4+4x^2+4+4x^3+4x^2+8x)+\\&+(Bx+C)(x^3+2x^2+2x+x^2+2x+2)+(Dx+E)(x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=&A(x^4+4x^3+8x^2+8x+4)+(Bx+C)(x^3+3x^2+4x+2)+\\&+(Dx+E)(x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=&A(x^4+4x^3+8x^2+8x+4)+B(x^4+3x^3+4x^2+2x)+\\&+C(x^3+3x^2+4x+2)+D(x^2+x)+E(x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=&(A+B)x^4+(4A+3B+C)x^3+(8A+4B+3C+D)x^2+\\&+(8A+2B+4C+D+E)x+(4A+2C+E)\end{aligned}$$

izjednačavanjem koeficijenata kod odgovarajućih stepena dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}&A+B&&=4 \quad \Rightarrow B=4-A\\&4A+3B+C&&=15\\&8A+4B+3C+D&&=30\\&8A+2B+4C+D+E&&=25\\&4A+2C+E&&=9 \quad \Rightarrow E=9-4A-2C\end{aligned}$$

uvrštavajući B i E u ostale tri jednačine:

$$\begin{aligned}&4A+12-3A+C=15\\&8A+16-4A+3C+D=30\\&8A+8-2A+4C+D+9-4A-2C=25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A+C=3 \qquad \Rightarrow C=3-A\\&4A+3C+D=14\\&2A+2C+D=8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&4A+9-3A+D=14\\&2A+6-2A+D=8\end{aligned}$$

$$A + D = 5$$
$$\underline{D = 2}$$

odavde je $D = 2$, $A = 3$, $C = 0$, $B = 1$, $E = -3$. Podintegralna funkcija astavljena na parcijalne sabirka ima oblik:

$$\frac{4x^4 + 15x^3 + 30x^2 + 25x + 9}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{3}{x+1} + \frac{x}{x^2 + 2x + 2} + \frac{2x - 3}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

a traženi integral je

$$\mathbf{I} = \int \frac{4x^4 + 15x^3 + 30x^2 + 25x + 9}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)^2} dx$$

$$\mathbf{I} = \int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx + \int \frac{2x - 3}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$$

$$\mathbf{I} = \int \frac{4x^4 + 15x^3 + 30x^2 + 25x + 9}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$$

gde smo sa $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ redom označili integrale parcijalnih sabiraka. Rešavajmo ih:

$$\mathbf{I}_1 = \int \frac{3}{x+1} dx = 3\ln|x+1| + c_1$$

$$\mathbf{I}_2 = \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx - \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

uvedimo smenu $\left| \begin{matrix} x^2 + 2x + 2 = t \\ (2x + 2)dx = dt \end{matrix} \right|$ u prvom integralu, tada je

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \left| \begin{matrix} x + 1 = z \\ dx = dz \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \ln|t| - \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln|t| - \operatorname{arctg} z + c_2$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 2| - \operatorname{arctg}(x+1) + c_2$$

$$\mathbf{I}_3 = \int \frac{2x - 3}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \int \frac{2x + 2 - 5}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx - 5\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

u prvom integralu uvedimo istu smenu kao u integralu $\mathbf{I}_2$, tada je

$$\mathbf{I}_3=\int\frac{dt}{t^2}-5\int\frac{dx}{\left((x+1)^2+1\right)^2}=\begin{vmatrix}x+1=z\\dx=dz\end{vmatrix}=\frac{t^{-1}}{-1}-5\int\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}=-\frac{1}{t}-5\int\frac{1+z^2-z^2}{\left(z^2+1\right)^2}dz$$

$$\mathbf{I}_3=-\frac{1}{x^2+2x+2}-5\int\frac{dz}{z^2+1}+5\int\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}dz=\frac{-1}{x^2+2x+2}-5\,\mathrm{arctg}z+5\int\frac{z\cdot zdz}{\left(z^2+1\right)^2}$$

poslednji integral se rešava metodom parcijalne integracije (rešen je u 144. primeru):

$$\mathbf{I}_3=\frac{-1}{x^2+2x+2}-5\mathrm{arctg}(x+1)+5\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}z-\frac{z}{1+z^2}\right)+c_3$$

$$\mathbf{I}_3=\frac{-1}{x^2+2x+2}-5\mathrm{arctg}(x+1)+\frac{5}{2}\mathrm{arctg}(x+1)-\frac{5(x+1)}{2\left(x^2+2x+2\right)}+c_3$$

$$\mathbf{I}_3=-\frac{5}{2}\mathrm{arctg}(x+1)-\frac{5x+7}{2\left(x^2+2x+2\right)}+c_3$$

Ako ove rezultate uvrstimo u originalni integral, dobijamo da je:

$$\mathbf{I}=3\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|-\mathrm{arctg}(x+1)-\frac{5}{2}\mathrm{arctg}(x+1)-\frac{5x+7}{2\left(x^2+2x+2\right)}+c_1+c_2+c_3$$

a posle sređivanja izraza rezultat je:

$$\mathbf{I}=3\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|-\frac{7}{2}\mathrm{arctg}(x+1)-\frac{5x+7}{2\left(x^2+2x+2\right)}+c\,.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

176. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ **.**

177. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ **.**

178. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$ **.**

179. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$ **.**

180. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$ **.**

181. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{x^3+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$ **.**

182. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{x^3+1}$ **.**

183. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}$ **.**

184. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$ **.**

185. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{x^3+1}{\left(x^2-4x+5\right)^2}dx$ **.**

5.4. Integrali iracionalnih funkcija

Integrale iracionalnih funkcija odgovarajućim smenama možemo svesti na integrale racionalnih funkcija. Razne tipove iracionalnih integrala rešavamo različitim smenama. Obradićemo ih po tipovima podintegralnih funkcija i u svakom slučaju ćemo zadati odgovarajuće smene, pomoću kojih se dati integrali svode na integrale racionalnih funkcija. Za svaki tip ćemo detaljno izraditi po jedan ili dva primera.

Iracionalni integral tipa $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},...\right]dx$***, gde je*** R ***racionalna funkcija a*** $p_1,q_1,p_2,q_2,...$***su celi brojevi, rešavaju se smenom*** $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$***, gde je*** n ***najmanji zajednički sadržalac brojeva*** $q_1,q_2,...$***.***

152. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int x\cdot\sqrt[3]{4+3x}\,dx$ **.**

Rešenje: Podintegralna iracionalna funkcija je navedenog tipa, pa možemo uvesti predloženu smenu:

$$\mathbf{I}=\int x\cdot\sqrt[3]{4+3x}\,dx=\left|\begin{array}{c}4+3x=t^3\ \Rightarrow\ x=\dfrac{t^3-4}{3}\\ 3dx=3t^2dt\\ dx=t^2dt\end{array}\right|=\int\frac{t^3-4}{3}\cdot\sqrt[3]{t^3}\cdot t^2dt=\frac{1}{3}\int t^3\left(t^3-4\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int t^6dt-\frac{4}{3}\int t^3dt=\frac{1}{3}\frac{t^7}{7}-\frac{4}{3}\frac{t^4}{4}+c=\frac{t^7}{21}-\frac{t^4}{3}+c=\frac{t^4}{3}\left(\frac{t^3}{7}-1\right)+c=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(4+3x)^4}}{3}\left(\frac{4+3x}{7}-1\right)+c=\frac{(4+3x)\sqrt[3]{4+3x}}{3}\left(\frac{3x-3}{7}\right)+c$$

rešenje je:

$$\mathbf{I}=\int x\cdot\sqrt[3]{4+3x}\,dx=\frac{(x-1)(4+3x)\sqrt[3]{4+3x}}{7}+c\,.$$

153. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ **.**

Rešenje: $\mathbf{I}=\int\dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\int\dfrac{dx}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{4}}}$,

Iz ovog načina zapisivanja podintegralne funkcije vidimo da se ona može uvrstiti u dati tip iracionalnog integrala. Primenimo zato predloženu smenu:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\int\frac{dx}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{4}}}=\left|\begin{array}{c}2x-1=t^4\\ 2dx=4t^3dt\\ dx=2t^3dt\end{array}\right|=\int\frac{2t^3dt}{t^2-t}=2\int\frac{t^2dt}{t-1}$$

znači da smo dati integral smenom sveli na integral racionalne funkcije, koji rešavamo na način kako smo to pokazali kod integrala racionalnih funkcija. Rastavimo podintegralnu funkciju na celi deo i na prvi razlomljeni deo:

$$\frac{t^2}{t-1}=\frac{t^2-1+1}{t-1}=t+1+\frac{1}{t-1}$$

tada je:

$$\mathbf{I}=2\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=2\int t\,dt+2\int dt+2\int\frac{dt}{t-1}=\left|\begin{array}{c}t-1=z\\ dt=dz\end{array}\right|$$

navedenu smenu treba primeniti u poslednjem integralu. Posle smene:

$$\mathbf{I}=2\frac{t^2}{2}+2t+2\int\frac{dz}{z}=t^2+2t+2\ln|z|+c=t^2+2t+2\ln|t-1|+c$$

vratimo se na promenljivu x :

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\sqrt[4]{(2x-1)^2}+2\sqrt[4]{2x-1}+2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1}-1\right|+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+c\,.$$

154. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$ **.**

Rešenje: Primenimo predloženu smenu:

$$\mathbf{I}=\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=\int x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}dx=\left|\begin{array}{l}\frac{x-1}{x+1}=t^2\\ x=\frac{t^2+1}{1-t^2}\\ dx=\frac{4tdt}{\left(1-t^2\right)^2}\end{array}\right|=\int\frac{t^2+1}{1-t^2}\cdot\sqrt{t^2}\cdot\frac{4tdt}{\left(1-t^2\right)^2}$$

$$\mathbf{I}=4\int\frac{t^4+t^2}{\left(1-t^2\right)^3}dt=4\int\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}dt$$

Dobili smo integral prave racionalne funkcije, pa podintegralnu funkciju rastavljamo na zbir parcijalnih sabiraka:

$$\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}=\frac{A}{(1-t)}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{(1-t)^3}+\frac{D}{(1+t)}+\frac{E}{(1+t)^2}+\frac{F}{(1+t)^3}$$

$$t^4+t^2=A(1-t)^2(1+t)^3+B(1-t)(1+t)^3+C(1+t)^3+D(1+t)^2(1-t)^3+E(1+t)(1-t)^3+F(1-t)^3$$

jednakost važi za svako $t\in R$, pa:

ako je $t=1$ tada je

$2=8C \qquad\Rightarrow\qquad C=\frac{1}{4}$

ako je $t=-1$ rada je

$2=8F \qquad\Rightarrow\qquad F=\frac{1}{4}$

ako je $t=0$ tada

$0=A+B+\frac{1}{4}+D+E+\frac{1}{4} \qquad\Rightarrow\qquad A+B+D+E=-\frac{1}{2}$

ako je $t=2$ tada je

$$16+4=27A-27B+\frac{27}{4}-9D-3E-\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 27A-27B-9D-3E=\frac{27}{2}$$

ako je $t=-2$ tada je

$$16+4=-9A-3B-\frac{1}{4}+27D-27E+\frac{27}{4} \quad \Rightarrow \quad -9A-3B+27D-27E=\frac{27}{2}$$

ako je $t=3$ tada je

$$81+9=256A-128B+16-128D-32E-2 \quad \Rightarrow \quad 256A-128B-128D-32E=76$$

iz dobijeni je dnačina sastavljamo sistem

$$\begin{aligned}
&A+B+D+E=-\frac{1}{2}\\
&27A-27B-9D-3E=\frac{27}{2}\\
&-9A-3B+27D-27E=\frac{27}{2}\\
&\underline{256A-128B-128D-32E=76}
\end{aligned}$$

koji za rešenje ima brojeve: $A=D=\frac{1}{8}$, $B=E=-\frac{3}{8}$, $C=F=\frac{1}{4}$. Rastavimo sada racionalnu funkciju na zbir parcijalnih sabiraka:

$$\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}=\frac{1}{8(1-t)}-\frac{3}{8(1-t)^2}+\frac{1}{4(1-t)^3}+\frac{1}{8(1+t)}-\frac{3}{8(1+t)^2}+\frac{1}{4(1+t)^3}$$

a integral je:

$$\mathbf{I}'=\int\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}dt=\int\frac{dt}{8(1-t)}-\int\frac{3dt}{8(1-t)^2}+\int\frac{dt}{4(1-t)^3}+\int\frac{dt}{8(1+t)}-\int\frac{3dt}{8(1+t)^2}+\int\frac{dt}{4(1+t)^3}$$

$$\mathbf{I}'=\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_2+\mathbf{I}_3+\mathbf{I}_4-\mathbf{I}_5+\mathbf{I}_6$$

gde je

$$\mathbf{I}_1=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{1-t}=-\frac{1}{8}\ln|1-t|+c_1$$

$$\mathbf{I}_2=\frac{3}{8}\int\frac{dt}{(1-t)^2}=\left|\begin{matrix}1-t=z\\dt=-dz\end{matrix}\right|=-\frac{3}{8}\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{3}{8}\cdot\frac{z^{-1}}{-1}+c_2=\frac{3}{8z}+c_2=\frac{3}{8(1-t)}+c_2$$

$$\mathbf{I}_3=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1-t)^3}=\left|\begin{matrix}1-t=z\\dt=-dz\end{matrix}\right|=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^3}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{z^{-2}}{-2}+c_3=\frac{1}{8z^2}+c_3=\frac{1}{8(1-t)^2}+c_3$$

$$\mathbf{I}_4 = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{8}\ln|1+t| + c_4$$

$$\mathbf{I}_5 = \frac{3}{8}\int \frac{dt}{(1+t)^2} = \begin{vmatrix} 1+t=z \\ dt=dz \end{vmatrix} = \frac{3}{8}\int \frac{dz}{z^2} = \frac{3}{8}\cdot\frac{z^{-1}}{-1} + c_5 = -\frac{3}{8z} + c_5 = -\frac{3}{8(1+t)} + c_5$$

$$\mathbf{I}_6 = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1+t)^3} = \begin{vmatrix} 1+t=z \\ dt=dz \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{z^{-2}}{-2} + c_6 = -\frac{1}{8z^2} + c_6 = -\frac{1}{8(1+t)^2} + c_6$$

saberimo sada dobijene integrale:

$$\mathbf{I}' = -\frac{1}{8}\ln|1-t| + c_1 - \frac{3}{8(1-t)} - c_2 + \frac{1}{8(1-t)^2} + c_3 + \frac{1}{8}\ln|1+t| + c_4 + \frac{3}{8(1+t)} - c_5 - \frac{1}{8(1+t)^2} + c_6$$

$$\mathbf{I}' = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2}\right) + c$$

$$\mathbf{I}' = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{3}{8}\cdot\frac{1-t-1-t}{1-t^2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{(1+t)^2-(1-t)^2}{(1-t^2)^2} + c$$

$$\mathbf{I}' = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{3}{8}\cdot\frac{-2t}{1-t^2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1+2t+t^2-1+2t-t^2}{(1-t^2)^2} + c$$

$$\mathbf{I} = 4\mathbf{I}'$$

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 3\cdot\frac{t}{1-t^2} + 2\cdot\frac{t}{(1-t^2)^2} + c$$

vratimo se na početnu promenljivu x:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right| - 3\cdot\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\frac{x-1}{x+1}} + 2\cdot\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)^2} + c$$

i sredimo dobijeni izraz. Tada dobijamo rešenje početnog integrala:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| - \frac{3\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{2} + c$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x+1-3)+c$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{(x-2)\sqrt{x^2-1}}{2}+c\,\mathbf{.}$$

ZADACI ZA VEŽBU:

186. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$ **.**

187. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ **.**

188. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ **.**

189. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$ **.**

190. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$ **.**

Iracionalne integrale tipa $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ ***, gde su*** m,n,p ***racionalni (razlomljeni) brojevi, zovemo binomnim integralima, i možemo ih rešavati u sledeća tri slučaja:***

1. ***za*** $p\in Z$ ***integral se svodi na prethodni tip***
2. ***za*** $\frac{m+1}{n}\in Z$ ***treba primeniti smenu*** $a+bx^n=t^s$ ***, gde je*** s ***imenilac razlomka*** p
3. ***za*** $\frac{m+1}{n}+p\in Z$ ***primenjujemo smenu*** $ax^{-n}+b=t^s$ ***, gde je*** s ***imenilac razlomka*** p **.**

155. Primer: **Rešiti neoređeni integral** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ **.**

Rešenje: $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$, znači $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$.

Proverimo sada koji od tri uslova zadovoljavaju ovi brojevi:

1. $p=\frac{1}{3}\notin Z$, prvi uslov se ne može primeniti

2. $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2\in Z$, drugi uslov se može primeniti:

$$\mathbf{I}=\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{c} 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3 \\ x=\left(t^3-1\right)^4 \\ dx=12\left(t^3-1\right)^3t^2dt \end{array}\right|=\int \frac{\sqrt[3]{t^3}}{\left(t^3-1\right)^2}12\left(t^3-1\right)^3t^2dt=12\int t^3\left(t^3-1\right)dt$$

$$\mathbf{I}=12\int t^6dt-12\int t^3dt=12\frac{t^7}{7}-12\frac{t^4}{4}+c=t^4\left(\frac{12}{7}t^3-3\right)+c$$

vratimo se na početnu promenljivu x :

$$\mathbf{I}=\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4\left(\frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)-3\right)+c=\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,\frac{12+12\sqrt[4]{x}-21}{7}+c$$

$$\mathbf{I}=\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,\frac{12\sqrt[4]{x}-9}{7}+c=\frac{3}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+c\,.$$

156. Primer: **Rešiti neoređeni integral** $\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}$ **.**

Rešenje: $\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}=\int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-\frac{5}{3}}dx$, znači $m=-2$, $n=3$, $p=-\frac{5}{3}$.

Proverimo sada koji je od tri uslova zadovoljen za ove brojeve:

1. $p=-\frac{5}{3}\notin Z$, prvi slučaj se ne može primeniti,

2. $\frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{3}=-\frac{1}{3}\notin Z$, ni drugi slučaj ne možemo primeniti,

3. $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{6}{3}=-2\in Z$, treći slučaj je zadovoljen:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}=\left|\begin{array}{c}2x^{-3}+1=t^3\\ x=\sqrt[3]{\dfrac{2}{t^3-1}}\\ dx=-\dfrac{t^2}{\left(t^3-1\right)}\sqrt[3]{\dfrac{2}{t^3-1}}dt\end{array}\right|=\int\frac{-\dfrac{t^2}{\left(t^3-1\right)}\sqrt[3]{\dfrac{2}{t^3-1}}dt}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{t^3-1}\right)^2}\left(2+\dfrac{2}{t^3-1}\right)^{\frac{5}{3}}}$$

$$\mathbf{I}=-\int\frac{\dfrac{t^2}{t^3-1}dt}{\sqrt[3]{\dfrac{2}{t^3-1}}\left(\dfrac{2t^3}{t^3-1}\right)^{\frac{5}{3}}}=-\int\frac{\dfrac{t^2}{t^3-1}dt}{\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^5}\,t^5}{\sqrt[3]{t^3-1}\sqrt[3]{\left(t^3-1\right)^5}}}=-\int\frac{\dfrac{t^2}{t^3-1}dt}{\dfrac{4t^5}{\left(t^3-1\right)^2}}=-\frac{1}{4}\int\frac{t^3-1}{t^3}dt$$

$$\mathbf{I}=-\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{t^3}\right)dt=-\frac{1}{4}\int dt+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+c=-\frac{t}{4}-\frac{1}{8t^2}+c$$

vratimo se na početnu promenljivu x , tada je:

$$\mathbf{I}=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{2}{x^3}+1}-\frac{1}{8\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{x^3}+1\right)^2}}+c=-\frac{1}{4}\frac{\sqrt[3]{2+x^3}}{x}-\frac{x^2}{8\cdot\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+c$$

$$\mathbf{I}=-\frac{2\left(2+x^3\right)+x^3}{8x\cdot\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+c=-\frac{4+3x^3}{8x\cdot\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+c\,.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

191. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$ **.**

192. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ **.**

193. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}$ **.**

194. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^5}}$ **.**

195. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$ **.**

Iracionalne integrale tipa $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$***, gde je*** $P_n(x)$ ***polinom n-tog reda, rešavamo formulom:*** $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$**.**

Koeficijente polinoma $Q_{n-1}(x)$ ***i broj*** λ ***možemo odrediti ako diferenciramo datu jednakost i izjednačimo odgovarajuće koeficijente ispred odgovarajućih stepena nepoznate x.***

Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$ **.**

Rešenje: Podintegralnu funkciju treba dovesti na oblik koji je dat u opštem obliku ovog tipa iracionalnog integrala:

$$\mathbf{I} = \int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2+4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{x^2(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

$$\mathbf{I} = \int \frac{P_4(x)}{\sqrt{x^2+4}}dx = Q_3(x)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\mathbf{I} = \int \frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

diferencirajmo sada gornju jednačinu po nepoznazoj x , tada je:

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3ax^2+2bx+c)\sqrt{x^2+4} + (ax^3+bx^2+cx+d)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$

pomnožimo datu jednačinu sa $\sqrt{x^2+4}$:

$$x^4+4x^2 = (3ax^2+2bx+c)(x^2+4) + x(ax^3+bx^2+cx+d) + \lambda$$

$$x^4+4x^2 = 3ax^4+12ax^2+2bx^3+8bx+cx^2+4c+ax^4+bx^3+cx^2+dx+\lambda$$

$$x^4+4x^2 = 4ax^4+3bx^3+(12a+2c)x^2+(8b+d)x+4c+\lambda$$

izjednačavanjem odgorajućih koeficijenata dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{lll} 4a=1 & \Rightarrow & a=\frac{1}{4} \\ 3b=0 & \Rightarrow & b=0 \\ 12a+2c=4 & \Rightarrow & c=\frac{1}{2} \\ 8b+d=0 & \Rightarrow & d=0 \\ 4c+\lambda=0 & \Rightarrow & \lambda=-2 \end{array}$$

vratimo se u integral:

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)\sqrt{x^2+4}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)\sqrt{x^2+4}-\frac{2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{2}=t \\ dx=2dt\end{array}\right|$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x\left(x^2+2\right)}{4}\sqrt{x^2+4}-\int\frac{2dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x\left(x^2+2\right)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x\left(x^2+2\right)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}\right|+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x\left(x^2+2\right)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right|+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x\left(x^2+2\right)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+2\ln 2+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+c_1$$

ZADACI ZA VEŽBU:

196. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{x^2 dxx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ **.**

197. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ **.**

198. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1 + x^2}}$ **.**

199. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int x \sqrt{x^2 + 9}\, dx$ **.**

200. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int x^2 \sqrt{x^2 - 1}\, dx$ **.**

Iracionalne integrale tipa $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ***smenom*** $\frac{1}{x-\alpha} = t$ ***možemo dovesti na integrale prethodnog oblika.***

158. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$ **.**

Rešenje: Ako primenimo smenu predloženu za ovaj tip integrala, dobićemo:

$$\mathbf{I} = \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}} = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{x} = t \\ x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^5} \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} = -\int \frac{dt}{\frac{1}{t^3} \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = -\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

slično prethodnom zadatku:

$$\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left(at^3 + bt^2 + ct + d\right)\sqrt{1-t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

diferencirajmo sada ovu jednačinu:

$$\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} = \left(3at^2 + 2bt + c\right)\sqrt{1-t^2} + \left(at^3 + bt^2 + ct + d\right)\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}}$$

pomnožimo jednačinu sa $\sqrt{1-t^2}$:

$$t^4 = \left(3at^2 + 2bt + c\right)\left(1-t^2\right) - t\left(at^3 + bt^2 + ct + d\right) + \lambda$$

$$t^4 = 3at^2 + 2bt + c - 3at^4 - 2bt^3 - ct^2 - at^4 - bt^3 - ct^2 - dt + \lambda$$

$$t^4 = -4at^4 - 3bt^3 + \left(3a - 2c\right)t^2 + \left(2b - d\right)t + c + \lambda$$

ako izjednačimo odgovarajuće koeficijente, dobićemo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
-4a = 1 \quad &\Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4} \\
-3b = 0 \quad &\Rightarrow \quad b = 0 \\
3a - 2c = 0 \quad &\Rightarrow \quad c = -\frac{3}{8} \\
2b - d = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 0 \\
c + \lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

vratimo se u integral:

$$\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left(-\frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{8}t\right)\sqrt{1-t^2} + \frac{3}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{t}{4}\left(2t^2 + 3\right)\sqrt{1-t^2} + \frac{3}{8}\arcsin t + c$$

tada je originalni integral:

$$\mathbf{I} = -\int \frac{t^4\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2t^3 + 3t}{8}\sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8}\arcsin t + c$$

vratimo se na početnu promenljivu:

$$\mathbf{I} = \int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + c$$

$$\mathbf{I} = \int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} = \frac{2 + 3x^2}{8x^3}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + c$$

$$\mathbf{I} = \int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} = \frac{2 + 3x^2}{8x^4}\sqrt{x^2-1} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + c\,.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

201. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}}$ **.**

202. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$ **.**

203. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$ **.**

204. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ **.**

205. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$ **.**

Iracionalne integrale tipa $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ***možemo rešavati i pomoću trigonometrijskih ili hiperboličnih smena, ako potkorenu veličinu*** ax^2+bx+c ***napišemo u obliku razlike ili zbira kvadrata. Tada se dati integral može svesti na jedan od sledeća tri oblika, koje rešavamo sa datim smenama:***

1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ ***smena*** $x = a\sin t$ ***ili:*** $x = a\,\mathrm{th}\,t$

2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ ***smena:*** $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ ***ili:*** $x = a\,\mathrm{sh}\,t$

3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ ***smena:*** $x = a\sec t$ ***ili:*** $x = a\,\mathrm{ch}\,t$

159. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x+2}}$ **.**

Rešenje: $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, dobili smo znači drugi oblik, primenimo zato smenu $x = a\,\mathrm{tg}\,t$:

$$\mathbf{I} = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}} = \begin{vmatrix} x+1 = \mathrm{tg}\,t \\ \mathrm{dx} = \dfrac{\mathrm{dt}}{\cos^2 t} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\mathrm{tg}^2 t \cos^2 t \sqrt{\mathrm{tg}^2 t+1}} =$$

$$=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\begin{vmatrix}\sin t=z\\ \cos t dt=dz\end{vmatrix}=\int\frac{dz}{z^2}=\frac{z^{-1}}{-1}+c=\frac{-1}{z}+c=\frac{-1}{\sin t}+c=\frac{-1}{\sin(\operatorname{arctg}(x+1))}+c=$$

$$=\frac{-1}{\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+1))}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x+1))+1}}}+c=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+c\ .$$

160. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$ **.**

Rešenje: Dati integral je prvi oblik od moguća tri oblika, zato je:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}=\begin{vmatrix}x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\end{vmatrix}=\int\frac{\cos t\,dt}{(\sin^2 t-1)\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int\frac{\cos t\,dt}{-\cos^2 t\cos t}=$$

$$-\int\frac{dt}{\cos^2 t}=-\operatorname{tg}t+c=-\operatorname{tg}(\arcsin x)+c=-\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}+c=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}+c=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

ZADACI ZA VEŽBU:

206. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$ **.**

207. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$ **.**

208. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ **.**

209. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$ **.**

210. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{2+x^2}\,dx$ **.**

Iracionalne integrale tipa $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ***možemo rešavati i sa Ojlerovim smenama:***

1) ako kavdratni trinom ax^2+bx+c ***nema realne korene,***

a) i $a>0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t$

b) i $c>0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$

2) ako je $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$***, gde su*** x_1, x_2 ***realni koreni kvadratnog trinoma, tada je:***

$$a(x-x_1)=(x-x_2)t^2.$$

161. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti iracionalni intgeral** $\int\sqrt{2+x^2}\,dx$ **.**

Megoldás: Potkorena kvadratna veličina x^2+2 nema realne korene i $a=1>0$, zato primenjujemo smenu 1) a) :

$$\sqrt{2+x^2}=x+t \qquad /^2$$

$$2+x^2=x^2+2xt+t^2$$

$$2xt=2-t^2$$

$$x=\frac{2-t^2}{2t}$$

$$dx=-\frac{t^2+2}{2t^2}dt$$

$$\mathbf{I}=-\int\left(\frac{2-t^2}{2t}+t\right)\frac{t^2+2}{2t^2}dt=-\int\frac{2-t^2+2t^2}{2t}\frac{t^2+2}{2t^2}dt=-\int\frac{\left(t^2+2\right)^2}{4t^3}dt=-\int\frac{t^4+4t^2+4}{4t^3}dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{4}{t}+\frac{4}{t^3}\right)dt=-\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+4\ln|t|+4\frac{t^{-2}}{-2}\right)+c=-\frac{t^2}{8}-\ln|t|+\frac{1}{2t^2}+c=$$

$$=-\frac{1}{8}\left(\sqrt{2+x^2}-x\right)^2-\ln\left|\sqrt{2+x^2}-x\right|+\frac{1}{2\left(\sqrt{2+x^2}-x\right)^2}+c=$$

kvadrirajmo izraze u zagradama, tada je:

$$\mathbf{I}=\frac{1}{4\left(1+x^2-x\sqrt{2+x^2}\right)}-\frac{1+x^2-x\sqrt{2+x^2}}{4}-\ln\left|\sqrt{2+x^2}-x\right|+c\,.$$

162. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti iracionalni intgeral** $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$ **.**

Rešenje: Kvadratni trinom pod korenom ima realne korene, pa se može napisati da je $-x^2-2x+3=-(x+3)(x-1)$, primenjujemo znači smenu pod 2) :

$$-(x+3)=(x-1)t^2 \qquad /\cdot(x-1)$$

$$-(x+3)(x-1)=(x-1)^2t^2$$

$$3-2x-x^2=(x-1)^2t^2$$

a iz druge jednačine sledi:

$$x+3=t^2-xt$$

$$x+xt^2=t^2-3$$

$$x=\frac{t^2-3}{1+t^2}$$

$$dx=\frac{8t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

Tada se dati integral formira na sledeći način:

$$\mathbf{I}=\int\sqrt{\left(\frac{t^2-3}{1+t^2}-1\right)^2 t^2}\,\frac{8t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}=\int\frac{t^2-3-1-t^2}{1+t^2}\,t\,\frac{8t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}=-32\int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)^3}=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=t & dv=\dfrac{t\,dt}{\left(1+t^2\right)^3} \\ du=dt & v=\displaystyle\int\frac{t\,dt}{\left(1+t^2\right)^3}=\frac{-1}{4\left(1+t^2\right)^2}\end{array}\right|=-32\left(\frac{-t}{4\left(1+t^2\right)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}-8\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}\cdot\frac{t}{t}=\left|\begin{array}{ll} u=\dfrac{1}{t} & dv=\dfrac{t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2} \\ du=-\dfrac{dt}{t^2} & v=\displaystyle\int\frac{t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}=\frac{-1}{2\left(1+t^2\right)}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}-8\left(\frac{-1}{2t\left(1+t^2\right)}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2\left(1+t^2\right)}\right)=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}+\frac{4}{t\left(1+t^2\right)}+4\int\frac{dt}{t^2\left(1+t^2\right)}=$$

poslednji integral je integral racionalne funkcije, rešavamo ga rastavljanjem na parcijalne sabirke:

$$=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}+\frac{4}{t\left(1+t^2\right)}+4\int\frac{dt}{t^2}-4\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}+\frac{4}{t\left(1+t^2\right)}+4\frac{t^{-1}}{-1}-4\operatorname{arctg}t+c=$$

$$=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}+\frac{4}{t\left(1+t^2\right)}-\frac{4}{t}-4\operatorname{arctg}t+c=$$

$$=\frac{8\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}}{\left(1+\frac{x+3}{1-x}\right)^2}+\frac{4}{\left(1+\frac{x+3}{1-x}\right)\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}}-\frac{4}{\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}}+4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}+c=$$

sređivanjem ovog izraza dobijamo konačno rešenje, a to je:

$$=\frac{(1-x)^2}{2}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}-\sqrt{3-2x-x^2}-4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\mathrm{x}+3}{1\text{-}\mathrm{x}}}+c\,.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

211. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{x^2+5x+6}\,dx$ **.**

212. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{4x^2+6x+1}\,dx$ **.**

213. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{x^2-5x+6}\,dx$ **.**

214. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{4x^2+1}\,dx$ **.**

215. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$ **.**

5.5. Integrali trigonometrijskih funkcija

Neodređene trigonometrijske integrale oblika $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ ***smenama:***

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

svodimo na integrale racionalnih funkcija. Ako je $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ ***tada umesto datih, možemo primeniti i sledeće smene:***

$$\mathrm{tg} x = t$$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad .$$

163. Primer: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ **.**

Rešenje: Primenimo date smene. Tada je:

$$\mathbf{I} = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln\left|1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + c\ .$$

164. Primer: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$ **.**

Rešenje: Primenimo smenu $tg\frac{x}{2} = t$. Tada je:

$$\mathbf{I} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3}\,dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2dt}{2\left(t^2+2t+2\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \mathrm{arctg}(t+1) + c = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1\right) + c\ .$$

165. Primer: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ **.**

Rešenje: Primenimo trigonometrijske smene:

$$\mathbf{I}=\int \frac{dx}{3+5\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int \frac{dt}{8-2t^2}=\int \frac{dt}{4-t^2}=\int \frac{dt}{(2-t)(2+t)}=$$

posle rastavljanja na parcijalne sabirke

$$=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{2+t}+\frac{1}{4}\int \frac{dt}{2-t}=\frac{1}{4}\ln|2+t|-\frac{1}{4}\ln|2-t|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+c\,.$$

166. Primer: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ **.**

Rešenje: U ovom slučaju važi da je $\frac{1}{1+(-\sin x)^2}\equiv\frac{1}{1+\sin^2 x}$, pa možemo da primenimo drugu smenu. Tada je:

$$\mathbf{I}=\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{1+2t^2}=\int \frac{dt}{1+\left(t\sqrt{2}\right)^2}=\left|\begin{array}{l} t\sqrt{2}=z \\ dt=\frac{dz}{\sqrt{2}} \end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{1+z^2}=\frac{\operatorname{arctg} z}{\sqrt{2}}+c=$$

$$=\frac{\operatorname{arctg} t\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right)+c\,.$$

167. Primer: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx$ **.**

Rešenje: I u ovom slučaju možemo primeniti smenu $\operatorname{tg} x=t$:

$$\mathbf{I}=\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx=\int \frac{tgx-1}{tgx+2}dx=\int \frac{t-1}{t+2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{t-1}{(t+2)(t^2+1)}dt$$

Rastavimo podintegralnu funkciju na parcijalne sabirke:

$$\frac{t-1}{(t+2)\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{t+2}+\frac{Bt+C}{t^2+1}=\frac{At^2+A+Bt^2+Ct+2Bt+2C}{(t+2)\left(1+t^2\right)}$$

Odavde je: $t-1=A\left(t^2+1\right)+(Bt+C)(t+2)$

$$A+B=0$$

$$2B+C=1$$

$$A+2C=-1$$

Ako je $t=-2$ tada iz prve jednačine dobijamo da je $A=-\frac{3}{5}$,

a iz sistema jednačina dalje računamo $B=\frac{3}{5}$, $C=-\frac{1}{5}$.

Integraljenje nastavljamo na sledeći način:

$$\mathbf{I}=-\frac{3}{5}\int\frac{dt}{t+2}+\frac{1}{5}\int\frac{3t-1}{t^2+1}dt=-\frac{3}{5}\ln|t+2|+\frac{3}{10}\int\frac{2tdt}{t^2+1}-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

ako u drugom sabirku uvedemo smenu $t^2+1=z$, tada je $2tdt=dz$ i tako je:

$$\mathbf{I}=-\frac{3}{5}\ln|t+2|+\frac{3}{10}\ln\left(t^2+1\right)-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}t+c=-\frac{3}{5}\ln|\operatorname{tg}x+2|+\frac{3}{10}\ln\left(\operatorname{tg}^2x+1\right)-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)+c$$

$$\mathbf{I}=-\frac{3}{5}\ln|\operatorname{tg}x+2|+\frac{3}{10}\ln\left(\operatorname{tg}^2x+1\right)-\frac{1}{5}x+c\,.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

216. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ **.**

217. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$ **.**

218. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$ **.**

219. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$ **.**

220. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$ **.**

221. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$ **.**

222. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}dx$ **.**

223. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$ **.**

224. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$ **.**

225. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx$ **.**

5.6. Integral eksponencijalne funkcije

Integral eksponencijalne funkcije tipa $\int R(e^x)\,dx$***, smenom:***

$$e^x = t$$
$$e^x dx = dt$$
$$dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

svodimo na integral racionalne funkcije.

168. Primer: **Rešiti eksponencijalni integral** $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx$ **.**

Rešenje: Neka je: $e^{\frac{x}{2}} = t$,

Tada je: $\frac{x}{2} = \ln t$

$$x = 2\ln t$$

$$dx = \frac{2}{t}dt$$

ovim smenama dati integral se svodi na integral:

$$\mathbf{I} = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t\left(1+t^2\right)}\cdot\frac{dt}{t} = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2\left(1+t^2\right)}dt$$

Ovaj integral rešavamo rastavljanjem na parcijalne sabirke:

$$\mathrm{u} = \operatorname{arctg} t \qquad , \; du = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$dv = \frac{dt}{t^2\left(t^2+1\right)} \;\; , \; v = \int \frac{dt}{t^2\left(t^2+1\right)} = \int \frac{1+t^2-t^2}{t^2\left(t^2+1\right)}dt = \int t^2 dt - \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t$$

Tada je:

$$\mathbf{I} = 2\left(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}^2 t + \int \frac{dt}{t\left(1+t^2\right)} + \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}dt\right) = 2\left(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}^2 t + \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2\right)$$

gde je

$$\mathbf{I}_1=\int\frac{dt}{t\left(1+t^2\right)}=\int\frac{1+t^2-t^2}{t\left(1+t^2\right)}dt=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{tdt}{1+t^2}=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$$

i

$$\mathbf{I}_2=\int\frac{\mathrm{arctg}t}{1+t^2}dt=\left|\begin{array}{l}\mathrm{arctg}t=z\\ \dfrac{dt}{1+t^2}=dz\end{array}\right|=\int zdz=\frac{z^2}{2}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2t$$

Na kraju:

$$\mathbf{I}=2\left(-\frac{1}{t}\mathrm{arctg}t-\mathrm{arctg}^2t+\ln|t|-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2t\right)+c$$

$$\mathbf{I}=-\frac{2\mathrm{arctg}t}{t}-2\mathrm{arctg}^2t+2\ln|t|-\ln\left(1+t^2\right)+\mathrm{arctg}^2t+c$$

$$\mathbf{I}=-\frac{2\mathrm{arctg}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}-\mathrm{arctg}^2e^{\frac{x}{2}}+\ln\frac{e^x}{1+e^x}+c\,.$$

169. Primer: **Rešiti eksponencijalni integral** $\int\frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx$ **.**

Rešenje: Smena je sada: $e^x=t$

$$x=\ln t$$

$$dx=\frac{dt}{t}$$

Dati integral posle uvođenja ovih smena biće:

$$\mathbf{I}=\int\frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{t^3-t}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t}=\int\frac{t^2-1}{t^2+1}dt=\int\frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt=\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=t-2\mathrm{arctg}t+c$$

$$\mathbf{I}=e^x-2\mathrm{arctg}e^x+c\,.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

226. Zadatak: **Rešiti eksponencijalni integral** $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$ **.**

227. Zadatak: **Rešiti eksponencijalni integral** $\int \frac{dx}{e^x \sqrt{(1+e^x)^3}}$ **.**

228. Zadatak: **Rešiti eksponencijalni integral** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ **.**

6. Određeni integrali

Ako je funkcija $f(x)$ *integrabilna na zatvorenom intervalu* $[a,b]$*, i na tom intervalu primitivna funkcija joj je funkcija* $F(x)$*, tada na osnovu Njuton-Lajbnicove formule određeni integral na intervalu* $[a,b]$ *može se izračunati po formuli:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

170. Primer: **Izračunati određeni integral** $\int_{-1}^{2} x^2 dx$ **.**

Megoldás: Prema Njutn–Lajbnicove formule:

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3 .$$

171. Primer: **Izračunati određeni integral** $\int_{1}^{e} \ln x dx$ **.**

Rešenje: Prema Njutn–Lajbnicove formule:

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{vmatrix} = x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = (e \ln e - 1 \ln 1) - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e =$$

$$= e - (e-1) = 1 .$$

172. Primer: **Izračunati određeni integral** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ **.**

Rešenje: Funkcija $\frac{1}{x^2}$ u intervalu $[-1,1]$ ima jednu tačku prekida, tačku $x=0$. Zato dati integral treba rasraviti na zbir dva integrala:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{-0}\frac{dx}{x^2}+\int_{+0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{-\varepsilon}-1\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty-2=\infty .$$

173. Primer: **Izračunati nesvojstveni integral** $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ **.**

Rešenje: Ako je granica integrala beskonačna, tada se određeni integral rešava uvođenjem granične vrednosti (lim), na sledeći način:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{T\to\infty}\operatorname{arctg}t\Big|_0^{T}=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{arctg}T - \operatorname{arctg}0)=\lim_{T\to\infty}\operatorname{arctg}T=\frac{\pi}{2} .$$

174. Primer: **Izračunati određeni integral** $\int_1^3\sqrt{x+1}\,dx$ **.**

Rešenje: Dati integral se može rešiti uvođenje smene, a to znači da kod određenog integrala paralelno treba da promenimo i granice:

$$\int_1^3\sqrt{x+1}\,dx=\begin{vmatrix}x+1=t^2\\ dx=2tdt\end{vmatrix}=\int_{\sqrt{2}}^{2}t\cdot 2tdt=2\int_{\sqrt{2}}^{2}t^2dt=2\frac{t^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=\frac{2}{3}\left(8-2\sqrt{2}\right)=\frac{4}{3}\left(4-\sqrt{2}\right).$$

ZADACI ZA VEŽBU:

229. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ **.**

230. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$ **.**

231. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **.**

232. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$ **.**

232. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **.**

234. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ctgx \, dx$ **.**

235. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$ **.**

6.1. Površina ravnih likova

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$, i na tom intervalu je nenegativna: $f(x) \geq 0$ $(a \leq x \leq b)$, tada

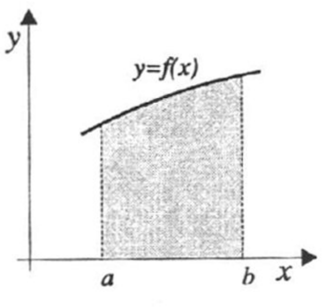
$$\int_a^b f(x)dx$$

predstavlja površinu krivolinijskog trapeza kojeg određuju luk funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a,b]$. x-osa i prave $x = a$ i i $x = b$. Ako je funkcija na posmatranom intervalu $[a,b]$ negativna $f(x) \leq 0$, tada je površina jednaka vrednosti određenog integrala uzet sa negativnim predznakom. Iz ovoga i iz osobine aditivnosti integrala sledi, da ako je funkcija $f(x)$ na nekom intervalu $[a,b]$ i pozitivna i negativna, tada površinu dobijamo kao razliku integrala dela funkcije koji se nalazi iznad i ispod x-ose.

Polazeći od površine krivolinijskog trapeza, možemo izračunati površine različitih ravnih likova.

6.1.1. Površina ravnih likova u pravouglom kordinatnom sistemu

Ako je $y = f(x) \geq 0$ i neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$, tada se površina krivolinijskog trapeza koji je ograničen sa datom krivom, sa x-osom i sa pravama $x = a$ i $x = b$, može se izračunati po formuli:



$$\mathbf{T} = \int_a^b f(x)dx.$$

175. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvaraju parabola $y = x^2$ i prava $y = x + 2$.**

Rešenje: Presek prave i parabole su tačke $A(-1,1)$ i $B(2,4)$, zato je:

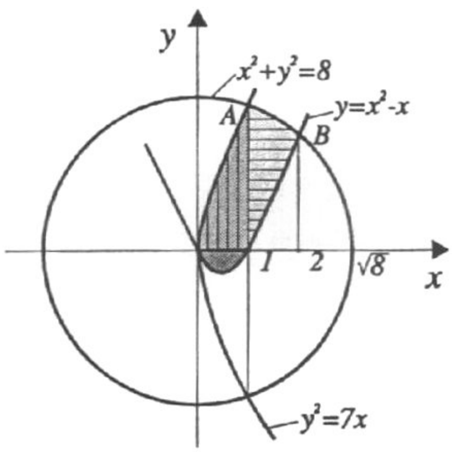
$$\mathbf{T} = \int_{-1}^{2} (x+2)dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 4.5 \quad .$$

176. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvaraju parabole $y = x^2$ i $y^2 = x$.**

Rešenje: Presečne tačke parabole $y = x^2$ i $y = \pm\sqrt{x}$ su tačke $A(0,0)$ i $B(1,1)$. Površinu kojeg zatvaraju ove parabole dobićemo ako iz površine ispod parabole $y = +\sqrt{x}$ oduzmemo površinu ispod parabole $y = x^2$. Tada je:

$$\mathbf{T} = \int_{0}^{1} \sqrt{x}dx - \int_{0}^{1} x^2 dx = \left(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad .$$

177. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvaraju kružnica $x^2 + y^2 = 8$, i parabole $y^2 = 7x$ i $y = x^2 - x$.**



Rešenje: Presečne tačke kružnice $x^2 + y^2 = 8$ i parabole $y^2 = 7x$ su:

$x^2+7x-8=0$

$$x_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\frac{-7\pm 9}{2}$$

$x=1$

Presečne tačke kružnice $x^2+y^2=8$ i parabole $y=x^2-x$ su:

$x^2+x^4-2x^3+x^2=8$

$x^4-2x^3+2x^2=8$

$x=2$

Traženu površinu treba odrediti iz tri dela:

$\mathbf{T}=\mathbf{T_1}-\mathbf{T_2}+\mathbf{T_3}$

$$\mathbf{T_1}=\int_0^1\sqrt{7x}\,dx=\sqrt{7}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{2\sqrt{7}}{3}(1-0)=\frac{2\sqrt{7}}{3}\ ,$$

$$\mathbf{T_2}=\int_0^1\left(x^2-x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\ ,$$

$$\mathbf{T_3}=\int_1^2\sqrt{8-x^2}\,dx-\int_1^2\left(x^2-x\right)dx=\left(\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+\frac{8}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{8}}\right)\Bigg|_1^2-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=2+4\arcsin\frac{2}{\sqrt{8}}-\frac{1}{2}\sqrt{7}-4\arcsin\frac{1}{\sqrt{8}}-\left(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2+4\arcsin\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{7}-4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{7}{3}+\frac{3}{2}=2+4\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{7}}{2}-4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{6}\ .$$

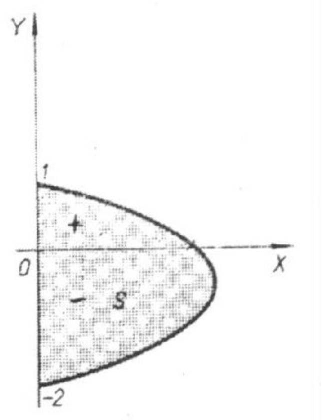
Tada je:

$$\mathbf{T}=\frac{2\sqrt{7}}{3}+\frac{1}{6}+2+\pi-\frac{\sqrt{7}}{2}-4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{6}$$

odnosno

$$\mathbf{T} = \frac{2\sqrt{7}}{3} - \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{4}{3} + \pi - 4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} \ .$$

178. Primer: **Određiti površinu kojeg zatvaraju kriva $x = 2 - y - y^2$ i ordinatna osa (*y*-osa) .**



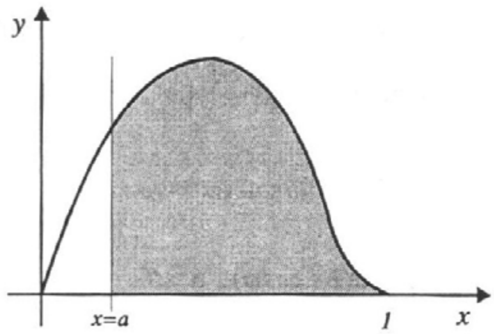
Rešenje: Promenile su se uloge promenljivih i osa x i y, pa traženu površinu možemo da izračunamo kao $T = \int_a^b f(y)dy$. Presečne tačke parabole i y-ose su:

$$x = 0$$
$$-y^2 - y + 2 = 0$$
$$y_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2}$$
$$y_1 = -2$$
$$y_2 = 1$$

Tada je tražena površina:

$$\mathbf{T} = \int_{-2}^{1} \left(2 - y - y^2\right)dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{9}{2} = 4.5 \ .$$

179. Primer: **Odrediti površinu kojeg zaklapaju krive $y = \sqrt{x}\ln^2 x$, prave $x = a \ \ (0 < a < 1)$, $x = 1$ i $y = 0$.**



Rešenje: Površina ispod tražene krive od a do 1:

$$\mathbf{T}=\int_a^1 \sqrt{x}\ln^2 x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln^2 x & dv=x^{\frac{1}{2}}dx \\ du=2\ln x\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}dx\end{matrix}\right|=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x\right)\Bigg|_a^1-\frac{4}{3}\int_a^1\sqrt{x}\ln x dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\ln x & dv=x^{\frac{1}{2}}dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{matrix}\right|=\left(0-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x\Bigg|_a^1-\frac{2}{3}\int_a^1\sqrt{x}dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\left(0-a\sqrt{a}\ln a\right)-\frac{4}{9}x\sqrt{x}\Bigg|_a^1\right)=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a+\frac{8}{9}a\sqrt{a}\ln a+\frac{16}{27}\left(1-a\sqrt{a}\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a+\frac{8}{9}a\sqrt{a}\ln a+\frac{16}{27}-\frac{16}{27}a\sqrt{a}=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln a\left(\ln a-\frac{4}{3}\right)+\frac{16}{27}\left(1-a\sqrt{a}\right).$$

ZADACI ZA VEŽBU:

236. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zatvaraju parabola $y=4x-x^2$ i apscisna osa.**

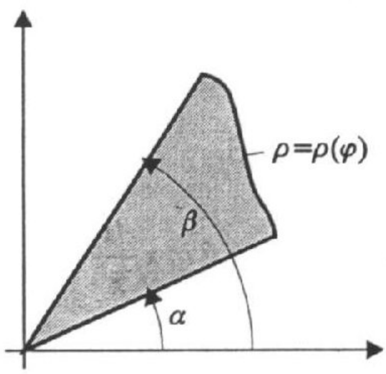
237. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zatvaraju kriva $y=\ln x$, prava $x=e$ i osa *x*.**

238. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zaklapaju kriva $y^3=x$ i prave $y=1$ i $x=8$.**

239. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zaklapaju parabole** $y = \dfrac{x^2}{3}$ i $y = 4 - \dfrac{2}{3}x^2$ **.**

240. Zadatak: **Odrediti merne brojeve onih površina, na koje parabola** $y^2 = 2x$ **deli kružnicu** $x^2 + y^2 = 8$ **.**

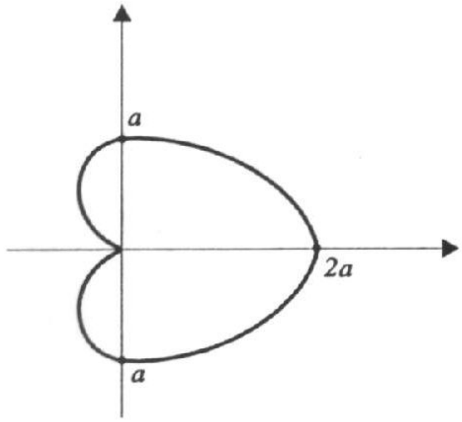
6.1.2. Površina ravnih likova u polarnom kordinatnom sistemu



Neka je data kriva $\rho = \rho(\varphi)$ *u polarnom kordinatnom sistemu, gde je* $\alpha \le \varphi \le \beta$ *,* $[\beta - \alpha] \le 2\pi$ *, i* $\rho = \rho(\varphi)$ *je neprekidna kriva. Površinu krivolinijskog trougla OAB kojge zaokružuju krive* $\rho = \rho(\varphi)$ *i poluprave* $\varphi = \alpha$ *i* $\varphi = \beta$ *možemo da izračunamo sledećom formulom:*

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi \quad .$$

180. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvara kadioid** $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$ **.**



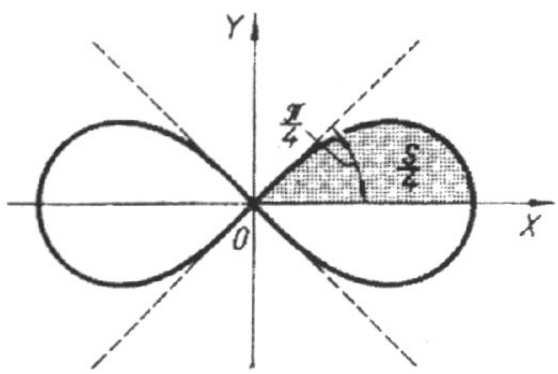
Rešenje**:** Jednačina kardioide je data sa polarnim kordinatama, zato koristimo gornju formulu za izračunavanje površine koju ona zatvara:

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{T}_1 = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi} d\varphi + 2a^2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi + a^2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= a^2\varphi\Big|_0^{\pi} + 2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = a^2\pi + \frac{a^2}{2}\pi = \frac{3}{2}a^2\pi \;.$$

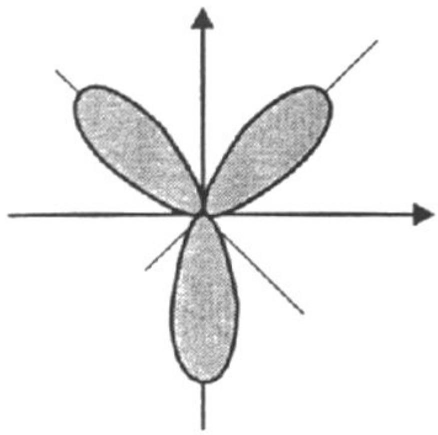
181. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvara Bernulijeva lemniskata, ako je njena jednačina:** $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ **.**



Rešenje: Zbog simetričnosti krive dovoljno je računati četvrtinu tražene površine:

$$\mathbf{T} = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = a^2 \quad .$$

182. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvara trolisnata ruža $\rho = a\sin 3\varphi \quad , a \in R$.**



Rešenje: Zbog simetričnosti ovih listova, i zbog $\sin 3\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0 \ , \ \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ tražena površina se može računati kao:

$$\mathbf{T} = 3 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 6\varphi}{2} d\varphi = \frac{3a^2}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{3a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) - \frac{a^2}{8}(\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{a^2\pi}{4} - \frac{a^2}{8}\cdot 0 = \frac{a^2\pi}{4} \ .$$

ZADACI ZA VEŽBU:

241. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zatvara jedan list krive $\rho = a\cos 2\varphi$.**

242. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zatvara kriva $\rho^2 = a^2 \sin 4\varphi$.**

243. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zatvara kriva** $\rho = a\sin 3\varphi$ **.**

244. Zadatak:**: Odrediti površinu kojeg zatvara kriva** $\rho = 2 + \cos\varphi$**.**

245. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zatvara elipsa** $\rho = \dfrac{2}{1+\varepsilon\cos\varphi}$**,** $0 \le \varepsilon < 1$ **.**

L I T E R A T U R A

1. M.P.Uščumlič, P.M.Miličić: Zbirka zadataka iz više matematike I.
   Naučna Knjiga, Beograd, 1980.

2. Demidovič: Zadaci i rešeni primeri iz matematičke analize za fakultete
   Tehnička Knjiga, Beograd, 1977.

3. Svetozar Kurepa: Matematička analiza I.
   Tehnička Knjiga, Zagreb, 1977.

4. Grupa autora: Matematika za više tehničke škole
   Savremena Administracija, Beograd, 1990.

5. Jožef Detki, Franja Ferenci: Matematika I
   Univerzitet u Novom Sadu, Subotica, 1983.

6. Szerényi Tibor: Analízis
   Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

7. B.P.Gyemidovics: Matematikai analízis, feladatgyűjtemény
   Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

8. Stefan Banach: Differenciál és integrálszámítás
   Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

9. Novković,Rodić,Kovačević: Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I
   Univerzitet u Novom Sadu
   Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1998.

10. MonostoryI.,Szeredai E.: Matematika példatár,VIII. kötet,
    Differenciálegyenletek
    Budapesti Műszaki egyetem
    Műegyetemi Kiadó,1998.